Klassrumsdialog i matematikundervisningen

– matematiska samtal i helklass i grundskolan

Skolforskningsinstitutets
systematiska översikter

SKOL FORSKNINGS INSTITUTET

Klassrumsdialog i matematikundervisningen
– matematiska samtal i helklass i grundskolan

PROJEKTGRUPP:
Karolina Fredriksson, fil.dr (projektledare)
Ida Envall, fil.dr
Eva Bergman
Maria Bergman
Sara Fundell
Eva Norén, fil.dr, Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapernas didaktik, Stockholms universitet (extern forskare)
Joakim Samuelsson, fil.dr, professor, Institutionen för beteendevetenskap och lärande , Linköpings universitet (extern forskare)

EXTERNA GRANSKARE:
Magnus Hultén, biträdande professor, Institutionen för samhälls- och välfärdsstudier, Linköpings universitet, Campus Norrköping
Angelika Kullberg, docent, Institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Göteborgs universitet

GRAFISK FORM: FamiljenPangea och Skolforskningsinstitutet
OMSLAGSFOTO: www.freeimages.co.uk
TRYCK: Lenanders Grafiska AB, Kalmar, 2018

ISBN: 978-91-984382-6-0 (tilltryck)
ISBN: 978-91-984382-7-7 (tilltryck pdf)

CITERA DENNA RAPPORT: Skolforskningsinstitutet. *Klassrumsdialog i matematikundervisningen – matematiska samtal i helklass i grundskolan.*. Systematisk översikt 2017:01. Solna: Skolforskningsinstitutet.

©Skolforskningsinstitutet
www.skolfi.se

FSC www.fsc.org MIX Papper från ansvarsfulla källor FSC® C115359

Svanenmärkt trycksak 3041 0145

Skolforskningsinstitutet verkar för att undervisningen i förskolan och skolan bedrivs på vetenskaplig grund. Det gör vi genom att

- sammanställa forskningsresultat, och
- bevilja forskningsmedel för praktiknära forskning.

Förord

Skolforskningsinstitutet har i uppdrag att göra forskningssammanställningar som rör undervisningsnära frågor. Det gör vi bland annat i form av så kallade systematiska översikter. Uppdraget knyter an till skollagens krav på att förskolans och skolans undervisning ska vila på vetenskaplig grund.

Klassrumsdialog i matematikundervisningen – matematiska samtal i helklass i grundskolan är institutets första översikt och bryter därmed ny mark beträffande vilken typ av forskningsbaserade underlag som erbjuds svenska lärare som stöd i deras viktiga arbete. Många fler kommer att följa.

Att producera systematiska forskningsöversikter är ett omfattande arbete. Många personer med olika kompetenser är involverade. Att göra något första gången erbjuder också särskilda utmaningar. Jag vill därför börja med att tacka samtliga mina medarbetare som alla på olika sätt bidragit i detta arbete. Särskilt tack naturligtvis till projektgruppen med Karolina Fredriksson som projektledare. Och till de två externa forskarna i projektgruppen, Eva Norén, Stockholms universitet och Joakim Samuelsson, Linköpings universitet, som medverkat i alla led som rör det vetenskapliga arbetet; urval, granskning, analys och syntesarbete, samt författande. Institutet är helt beroende av gott samarbete med externa forskare knutna till varje översikt. Stort tack för att ni steg ombord på detta projekt och följde med hela vägen!

Utöver dessa vill jag tacka Magnus Hultén, Linköpings universitet och Angelika Kullberg, Göteborgs universitet för granskning och många kloka synpunkter på ett manus som då började närma sig slutstadiet.

Vi har också haft god hjälp av följande lärare som varit referenspersoner: Nicholas Geber, Annika Linell, Annika Perlander, Johanna Rahm och Magnus Sjölander. Ni ingår också i Skolforskningsinstitutets Försöksverksamhet och kommer med tiden att pröva delar av översikten i era egna verksamheter. Det blir spännande att följa.

Min förhoppning är nu att många lärare som undervisar i matematik ska ha nytta av just denna översikt som befinner sig mitt i klassrummet, mitt bland lärare och elever.

Skolforskningsinstitutet, oktober 2017

Lena Adamson
Myndighetschef

Att utveckla undervisningen med stöd av systematiska översikter

Arbetet med en systematisk översikt innebär att sammanställa och analysera stora mängder forskning inom ett väl avgränsat område i syfte att besvara en på förhand specificerad frågeställning. Resultatet ska utgöras av den bästa tillgängliga internationella forskningen på området vid den tidpunkt då översikten framställs.

En systematisk översikt utmärks av öppet redovisade och strukturerade metoder för att identifiera, välja ut och sammanställa forskningsresultaten. Syftet är att minimera risken för att slump eller godtycklighet ska påverka resultaten. Det ska också vara möjligt att följa och värdera arbetet som lett fram till urvalet av forskning och sammanställningen av resultaten. Den som läser en systematisk översikt ska själv ha möjlighet att ta hänsyn till ytterligare forskning som eventuellt har tillkommit efter att översikten har genomförts, och som kan komplettera slutsatserna.

Skolforskningsinstitutets systematiska översikter är i första hand till för förskollärare och lärare. De riktar sig naturligtvis också till skolledare och alla andra beslutsfattare som på olika sätt kan främja goda förutsättningar för att bedriva skolans undervisning på vetenskaplig grund.

Begreppet vetenskaplig grund syftar på resultaten från vetenskapliga studier. Det kan handla om ämnesinnehåll, men också om vad den senaste forskningen säger om hur man bäst undervisar inom just detta ämnesområde. Det är det sistnämnda som är Skolforskningsinstitutets uppdrag. Våra systematiska översikter ska bidra till forskningsbaserad kunskap inom undervisning som kan underlätta för de verksamma att

- utveckla och förbättra metoder och arbetssätt
- utveckla förmågan att göra professionella bedömningar i relation till barns och elevers utveckling och lärande.

Här är det viktigt att påpeka att institutets översikter inte är manualer som ska följas till punkt och pricka. Forskningsbaserad kunskap är ett viktigt redskap för hög kvalitet i undervisningen, men det är alltid bara ett av flera beslutsunderlag. En lokal anpassning måste alltid ske när dessa resultat integreras i den egna undervisningen. Här är den enskilde förskollärarens eller lärarens kunskaper, erfarenheter och bedömningsförmåga, tillsammans med behoven hos just de barn eller elever hen undervisar de två andra grundläggande och nödvändiga komponenterna för att undervisningen ska bli av högsta kvalitet. Värt att minnas är också att metoder och arbetssätt, som även om de visat sig vara mycket välfungerande i många studier, alltid är beroende av den allmänna undervisningskvaliteten.

Skolforskningsinstitutets översikter kommer att ha olika karaktär beroende på vilken sorts forskning som ligger till grund. Därmed kan användningen också se olika ut. I vissa översikter finns generella slutsatser som sammanfattar det fullständiga

forskningsläget. Då måste vi ha i åtanke att även om en viss undervisningsmetod har visat sig ge goda effekter i en forskningsstudie är det inte alls säkert att resultaten blir lika goda när de ska användas i ett annat sammanhang. Vi måste också tänka på att när ett medelvärde i en grupp höjs, så är det just ett medelvärde där några ligger över och några ligger under. Klassen kan alltså höja sitt medelvärde inom ett kunskapsområde med det nya arbetssättet, men enskilda elever kan fortfarande behöva andra insatser. Detta berör spänningsfältet mellan gruppen och individen i lärarens uppdrag. Att använda ett väl beforskat arbetssätt, som i studier visat sig fungera för många elever, kan föra gruppen framåt samtidigt som läraren får mer tid för att enskilt anpassa undervisningsmetoder för det fåtal elever som behöver detta.

I andra översikter kan resultaten snarare likna en mosaik där många studier tillsammans ger en fördjupad förståelse inom ett visst undervisningsområde, samtidigt som någon av de enskilda ingående studierna kan ge mer konkreta exempel på hur ett moment kan behandlas.

I ytterligare andra översikter kan resultaten bidra till utvecklingen av det professionella språket inom ett visst undervisningsområde, vilket i sin tur kan bidra till en mer avancerad kommunikation i kollegiet.

Slutligen, god undervisningskvalitet bör i grunden bestå av precis samma grundläggande komponenter som god forskning, alltså ha tydliga mål för vad som ska uppnås, relevanta metoder, kritisk reflektion och kollegial granskning; allt för att veta mer om vilka resultat – elevernas utveckling och lärande – som uppnås, varför dessa uppnås och hur man kan utveckla och förbättra dessa resultat.

Arbetsgången för Skolforskningsinstitutets systematiska översikter

Nedan beskriver vi de olika stegen i arbetsgången kortfattat. För en ingående beskrivning av metod och genomförande för denna systematiska översikt, se kapitel 4.

Behovsinventering och förstudie

Syftet med behovsinventeringarna är att ringa in undervisningsnära ämnesområden där behovet av vetenskapligt grundad kunskap bedöms vara stort. Identifierade områden utreds sedan vidare inom ramen för förstudier.

Frågeställning

Utifrån resultaten från förstudien och i samråd med de ämnesexperter som knyts till projektet formuleras översiktens frågeställning. För att precisera denna och ge vägledning för de kommande databassökningarna formuleras tydliga kriterier som måste uppfyllas av de studier som inkluderas i översikten.

Litteratursökning

Sökningen efter forskningslitteratur görs framför allt i internationella forskningsdatabaser, med hjälp av söksträngar. En söksträng är den instruktion, i form av en kombination av ord, som matas in i en databas. Söksträngarnas utformning avgör vilka studier som fångas och utgör därför en nyckelfaktor för översiktens kvalitet.

Relevans- och kvalitetsbedömning

De studier som fångas bedöms mot bakgrund av översiktens frågeställning. Först bedöms relevansen, dvs. om studierna anses kunna bidra till att besvara översiktens frågeställning eller ej. Därefter granskas studiernas vetenskapliga kvalitet. Endast studier som bedöms vara relevanta och som håller tillräckligt hög kvalitet i förhållande till översiktens frågeställning inkluderas i översikten.

Data- och resultatextraktion

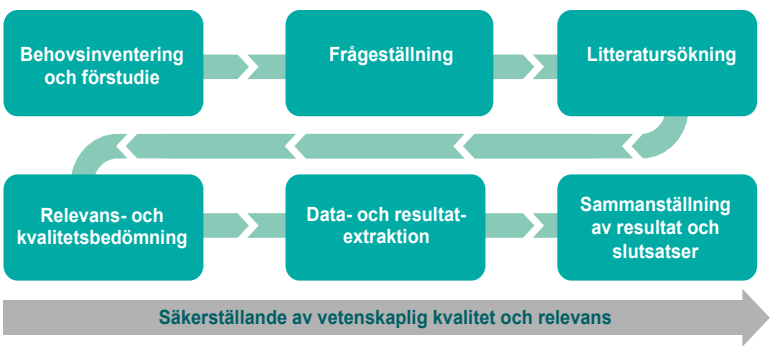
De ingående studiernas resultat extraheras och analyseras.

Sammanställning av resultat och slutsatser

Här sammanställs de ingående studiernas resultat till en helhet för att ge en djupare förståelse. Tillvägagångssätten kan variera bland annat beroende på översiktens frågeställning och vilken typ av forskning som ingår i översikten. Utifrån sammanställningen dras sedan slutsatser. Dessa svarar på översiktens frågeställning och ska kunna ligga till grund för professionella bedömningar i praktiken.

Arbetet bedrivs i projekt i vilka flera olika kompetenser finns representerade. Målet är att presentera så opåverkade svar på översiktens frågeställning som möjligt. Arbetet kännetecknas av utpräglad systematik och transparens.

FIGUR 1. Arbetsgång



Sammanfattning

Sammanfattning

Denna systematiska översikt ger en bild av vad forskningen sammantaget säger om hur lärare kan leda samtal i helklass för att få elever att delta i gemensamma matematiska resonemang. Det handlar om diskussioner i vilka eleverna använder och analyserar matematiska begrepp och argumenterar matematiskt. Detta är förmågor som kursplanen i matematik anger att undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla, och som forskning lyfter fram att elever i svensk skola behöver förstärka. Översikten rör också frågor om hur lärare kan möta och ta tillvara elevers olikheter i undervisningen, närmare bestämt hur lärare kan få med elever som inte är så benägna att delta i gemensamma resonemang, och hur elevers olika idéer kan bli en del av de matematiska samtalen och berika dem. Översikten utgår från följande frågeställning:

> Vad kännetecknar klassrumsdialoger som engagerar elever i matematiska resonemang och som möter och tar tillvara elevers olikheter, och vad kännetecknar lärarens ledning av sådana dialoger?

Översikten är en sammanställning av arton forskningsstudier som systematiskt har valts ut av forskare efter omfattande litteratursökningar i internationella forskningsdatabaser. Sökningarna resulterade i 10 528 studier.

Studierna bygger på ingående observationer och analyser av dialoger i helklass mellan lärare och elever. Det är klassrumssituationer som lärare skulle kunna känna igen sig i. Analyserna sätter ord på det som sker och ger förståelse i form av olika begrepp och strukturer. Denna vetenskapligt grundade kunskap kan utgöra stöd för lärare när de planerar och leder klassrumsdialoger i matematikundervisningen.

Resultat

En utgångspunkt för översikten är att klassrumsdialoger i matematikundervisningen kan se olika ut, och på så vis ge olika förutsättningar för elevers deltagande och lärande. Fokus i den utvalda forskningen ligger på hur lärare leder dialoger i vilka eleverna är aktiva kritiska deltagare i gemensamma matematiska resonemang. Denna typ av diskussion benämns bland annat *utforskande samtal* i forskningen och i de sammanhangen skiljs de från *disputerande samtal*, i vilka deltagarna är inriktade på att försvara och behålla kontrollen över sina egna idéer, och från *kumulativa samtal*, där deltagarna okritiskt accepterar varandras idéer. I utforskande samtal uttrycker och motiverar eleverna sina idéer, men engagerar sig också i andra elevers idéer och försöker nå en gemensam förståelse.

Läraren kan stödja elevers deltagande i utforskande samtal bland annat genom att ställa öppna frågor, lyssna noga på och ta tillvara elevernas matematiska idéer, liksom att uppmuntra elevernas engagemang i andra elevers matematiska idéer. Detta samtalsmönster skiljer sig från ett samtalsmönster där läraren dominerar samtalet och där

elevernas uppgift är begränsad till att svara rätt på lärares frågor, ibland benämnt IRE (Initiering Respons Evaluering). I de samtalen deltar eleverna i begränsad utsträckning med sina matematiska idéer.

Den utvalda forskningen beskriver hur lärares och elevers olika roller förändras parallellt i riktning mot utforskande samtal, i förhållande till fyra nyckelfaktorer som har betydelse för hur dialogen gestaltar sig, nämligen:

- Vem som ställer frågor och vilken typ av frågor som ställs.
- Vem som förklarar och motiverar matematiska idéer.
- Vem som bidrar med matematiska idéer.
- Vem som tar ansvar för lärandet och utvärderingen av matematiska resonemang.

Förändringarna innebär att eleverna blir alltmer aktiva deltagare i förhållande till de fyra nyckelfaktorerna och att läraren tar ett steg tillbaka och underlättar elevernas deltagande och ger stöd vid behov.

De parallella förändringarna i lärarnas och elevernas roller understryker lärarens betydelse för hur klassrumsdialoger gestaltar sig. Forskningen ger dock inga enkla svar på hur lärare kan gå tillväga. Det är exempelvis inte möjligt att ge anvisningar om lärarhandlingar som fungerar oavsett sammanhang. Vi ser i forskningen att en och samma lärarhandling kan engagera elever i utforskande samtal i ett sammanhang men inte i ett annat, att det ibland krävs en kombination av olika slags handlingar, och att elevers engagemang är beroende av ett samspel mellan karaktären på innehållet, lärarens handlingar och klassen. Däremot ger de utvalda studierna gedigen kunskap både om lärarhandlingar med *potential* att engagera eleverna i utforskande samtal, liksom kunskap om på vilket sätt de har betydelse för elevers engagemang.

En del av studierna handlar om hur lärare gör för att få elever att delta i resonemangen överhuvudtaget. Det handlar i mångt och mycket om handlingar som syftar till att etablera sociala normer som bäddar för elevers aktiva deltagande. Det lärarna gör är att på olika sätt synliggöra vad som är önskvärda beteenden i dessa samtal. Det kan ske genom att ge exempel på önskvärda beteenden i samtalen, förstärka elevbeteenden som är i linje med de önskade, eller omformulera elevernas beskrivningar av vad de gör så att de normer läraren vill etablera tydliggörs. Att det tydligt framgår hur eleverna förväntas bete sig kan underlätta deras deltagande i gemensamma resonemang. Det kan till exempel legitimera beteenden som eleverna annars skulle känna sig obekväma med, till exempel att ifrågasätta någon annans idé och be om en motivering, eller stödja eleverna så att de vågar dela med sig av sina egna ibland ofullständiga idéer. På så vis kan läraren stödja elever som av olika skäl känner motstånd inför att delta.

Andra studier handlar om hur lärare gör för att få elevernas gemensamma resonemang att handla om själva matematikinnehållet. I de utvalda studierna framgår att elever mycket väl kan delta i gemensamma resonemang i matematikundervisningen, utan att samtalen faktiskt rör matematiken på ett djupare plan. Detta sker exempelvis då

eleverna har fokus på procedurella aspekter i sina resonemang, såsom att beskriva hur de gick till väga, steg för steg, då de löste en uppgift. Forskning som jämfört klassrumsdialoger i olika klassrum visar viktiga skillnader i kvalitet på elevernas resonemang.

I samtliga av dessa klassrum förs visserligen gemensamma resonemang, men dessa resonemang rör inte alltid själva matematiken. I de klassrum där de faktiskt gör det råder – utöver gynnsamma sociala normer – vissa så kallade sociomatematiska normer.

Andra studier identifierar och benämner också lärarhandlingar som kan bidra till elevers engagemang i matematiken, genom att de exempelvis uppmanas att motivera, utvärdera och jämföra sina olika matematiska idéer. Att elevers olika idéer får bli en del i samtalen gör att fördjupade matematiska resonemang blir möjliga.

I utforskande samtal är eleverna aktiva deltagare, men det innebär inte att läraren helt lämnar över ansvaret till eleverna att utforska matematiken. Av studierna framgår att läraren ibland behöver vara mer stödjande genom att exempelvis själv förklara eller erbjuda sina tolkningar av vad samtalen handlar om. Det kan behövas då ny kunskap introduceras eller då eleverna i en klass upplever att ett visst innehåll är särskilt svårt att förstå. Resultat visar också hur lärare kan styra samtalen på ett sätt som gör att eleverna alltjämt deltar med sina matematiska idéer, även i sådana situationer. Det sker bland annat genom att läraren omformulerar det eleverna säger eller uppmärksammar och utvecklar vissa elevidéer – de som är på rätt spår – men inte andra. Forskningen konstaterar också att alla klassrumsdialoger inte behöver, bör eller kan vara utforskande. Ibland behöver lärare leda samtalen i högre utsträckning för att exempelvis behålla elevers koncentration eller inte förvirra elever som har svårt att förstå de initiala förklaringarna.

Slutsatser

Mot bakgrund av den forskning som redovisas i översikten drar vi bland annat följande slutsatser:

- Det läraren gör har stor betydelse för hur klassrumsdialogerna gestaltar sig. Men elever är olika, de skiljer sig i förmågor och erfarenheter, och forskningen kan inte ge några enkla anvisningar om lärarhandlingar som i allmänhet leder till att elever engagerar sig i gemensamma resonemang.
- Även om forskningen inte ger några enkla svar, så ger den användbar kunskap om vilka handlingar som har *potential* att engagera eleverna i gemensamma matematiska resonemang, och kunskap om *på vilket sätt* och *varför* dessa handlingar kan tänkas stödja elevernas deltagande.
- Forskningen kan också bidra till lärarens förståelse av den egna undervisningspraktiken genom att sätta ord på det som sker i klassrummet. Ett exempel är tre typer av klassrumsdialog som identifieras i forskningen: *disputerande*, *kumulativa* och *utforskande* samtal. Denna indelning ger en förståelse av i vilken mån elever är engagerade i gemensamma resonemang.

- Kunskap om sociala normer för utforskande samtal ger en förståelse av vad som har betydelse för elevers deltagande i gemensamma resonemang överhuvudtaget. Kunskap om sociomatematiska normer för elevernas matematiska aktivitet ger en förståelse av vad som har betydelse av elevers engagemang i själva matematiken.
- Forskningen visar hur man som lärare både kan möta och ta tillvara elevers olikheter i undervisningen. Av den framgår hur lärare gör för att
  - få med även de elever som känner motstånd mot att delta i gemensamma resonemang, genom att med olika handlingar synliggöra önskvärda beteenden i utforskande samtal. Lärare kan på så vis ge eleverna vägledning för hur man resonerar gemensamt och legitimera och stödja beteenden som elever känner sig obekväma med eller osäkra på
  - ta tillvara elevernas olika matematiska idéer och använda dem som en resurs för att fördjupa elevers engagemang i matematiken. Det gör lärarna genom att lyssna noga på det eleverna uttrycker och genom att med olika handlingar stimulera elever att utforska sina egna och andra elevers matematiska idéer.
- I utforskande samtal får elevers aktiva deltagande stort utrymme, men det innebär inte att läraren lämnar över allt ansvar för att utforska matematiken till eleverna.
- Förändringar av matematiska samtal i helklass tar tid. Är eleverna vana vid att samtalen i matematik vanligen förs enligt ett IRE-mönster kräver förändringen att eleverna både lär sig nya sätt att delta i samtalen och känner sig trygga med de nya förväntningarna på deras deltagande.

Innehåll

1. Varför en översikt om klassrumsdialog i matematikundervisningen? 1
1.1 Syfte och frågeställning 1
1.2 Bakgrund 1
En nyanserad men inte uttömmande bild 2
Klassrumsdialog – en del av en varierad matematikundervisning 2
2. Om denna översikt 5
2.1 Urvalet av forskning 5
2.2 Läsanvisning 6
3. Resultat 9
3.1 Utforskande samtal – elever uttrycker sina egna idéer och engagerar sig i andras 9
Fyra nyckelfaktorer med betydelse för hur klassrumsdialogen gestaltar sig 10
3.2 Lärarhandlingar med utforskande samtal som mål 16
Forskningen ger inga enkla svar 17
Att skapa ett utforskande klassrumsklimat 18
Att skapa förutsättningar för samtal som rör själva matematiken 24
Ibland behövs mer stöd från läraren 38
3.3 Slutsatser 42
4. Metod och genomförande 49
4.1 Behovsinventering och förstudie 50
4.2 Syfte och frågeställning 50
Inklusions- och exklusionskriterier 51
4.3 Litteratursökning 52
Sökstrategi 52
4.4 Relevans- och kvalitetsbedömning 53
4.5 Data- och resultatextraktion 55
4.6 Sammanställning av resultaten 55
Användning av resultaten 56
Referenser 58

Bilagor (återfinns på www.skolfi.se)
Bilaga 1: Sammanfattningar av de arton ingående studierna
Bilaga 2: Sökstrategi
Bilaga 3: Kvalitetsbedömning av primärstudier
Bilaga 4: Studier som exkluderades i sista granskningssteget

Kapitel 1
Varför en översikt om klassrumsdialog i matematik-undervisningen?

1. Varför en översikt om klassrumsdialog i matematikundervisningen?

1.1 Syfte och frågeställning

Med denna systematiska översikt vill vi ge lärare möjlighet att ta till sig forskningsbaserad kunskap som kan vara till hjälp vid planering och ledning av klassrumsdialoger i matematik. Vår förhoppning är att den ska ge lärare värdefulla insikter kring den egna undervisningspraktiken och därmed också ge uppslag till hur denna kan utvecklas. Den fråga som vi utifrån forskningen vill besvara är:

> Vad kännetecknar klassrumsdialoger som engagerar elever i matematiska resonemang och som möter och tar tillvara elevers olikheter, och vad kännetecknar lärarens ledning av sådana dialoger?

1.2 Bakgrund

Översikten har sin bakgrund i behov av kunskap om hur man som lärare kan utforma en undervisning som möter och tar tillvara elevers olikheter. Skolforskningsinstitutet identifierade dessa kunskapsbehov vid möten med lärare, myndigheter och organisationer, som föregick projektet. Genom inläsning och kontakt med forskare riktades sedan fokus mot klassrumsdialoger i matematik i grundskolan, det vill säga matematiska samtal i helklass.

Inriktningen mot klassrumsdialoger motiveras bland annat av att det är arbetssätt i vilka elevers olika matematiska idéer kan tas tillvara och bli en del av undervisningen. När elevers idéer blir synliga får läraren också möjlighet att anpassa sin undervisning efter dem. Elevers olikheter handlar också om att elever trivs med och klarar av olika arbetssätt olika bra. Alla elever ska dock få möjlighet att utveckla sin förmåga att delta i gemensamma matematiska resonemang. Vi vill med denna översikt bidra med kunskap om hur man som lärare kan möta elevers olikheter i det avseendet, och skapa goda förutsättningar för deras deltagande i klassrumsdialoger.

Inriktningen mot matematik motiveras framför allt av att svenska elevers kunskaper inom ämnet behöver förbättras. Behovet påvisas av statistik över svenska elevers slutbetyg i matematik i årskurs nio, liksom av deras matematikkunskaper i internationella studier.[1] Dessutom visar en fördjupad analys av de svenska elevernas

1 För betygsresultat se Skolverkets webbplats: Statistik och utvärdering/PM - Slutbetyg i grundskolan, våren 2017

svårigheter i matematik i den internationella studien TIMSS att eleverna behöver få tillfälle att diskutera matematik tillsammans med läraren och de andra eleverna. Detta för att utveckla begreppslig förståelse (Bentley, 2009).

Översiktens inriktning mot klassrumsdialog i matematikundervisningen är också i enlighet med den svenska kursplanen i matematik. Kursplanens sammanfattning innehåller fem punkter. Denna översikt fokuserar specifikt på tre av dem. Eleverna ska ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att

- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp
- föra och följa matematiska resonemang
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser.

En nyanserad men inte uttömmande bild

Som framgår av tabell 2 (s. 45–47) har studierna olika fokus. Resultaten från de olika studierna kompletterar på så vis varandra, och genom att ställa samman dem får vi en nyanserad bild av fenomenet klassrumsdialog. Det sammanställda resultatet bygger på samtliga arton studier som gått igenom relevans-och kvalitetsgranskning. Även om sammanställningen bygger på ett noggrant urval av en omfattande mängd studier ska det sägas att vi inte gör anspråk på att ge en uttömmande bild av vad som har betydelse för elevers deltagande i klassrumsdialog.

Vi har valt ut studier som undersöker lärares och elevers samspel i klassrumsdialoger i matematik. Vårt fokus ligger på förutsättningar för elevers deltagande i matematiska resonemang. En del av resultaten handlar om hur lärare kan ge utrymme för elevers matematiska idéer och ta tillvara dem i utforskande matematiska diskussioner. Vi har dock gjort en avgränsning som innebär att forskning med mer uttalat fokus mot visst matematikinnehåll inte ingår, exempelvis hur elever kan förstå ett specifikt matematikinnehåll, eller hur läraren kan framställa ett innehåll på ett sätt som skapar möjligheter till lärande. Vi har heller inte inkluderat studier om betydelsen av lärarens ämneskunskaper för hur dialogerna gestaltar sig.

Klassrumsdialog – en del av en varierad matematikundervisning

Klassrumsdialog ska naturligtvis bara ses som ett arbetssätt bland flera i matematikundervisningen. Vi säger inte att det är det bästa, mest effektiva arbetssättet i alla avseenden, och att det därför ska dominera undervisningen. Vi utgår ifrån att en bra matematikundervisning varierar arbetssätten. En variation av arbetssätt ger alla elever större möjligheter att känna sig kompetenta i någon del av matematikundervisningen och ger alla elever bättre förutsättningar att utveckla olika matematiska förmågor.

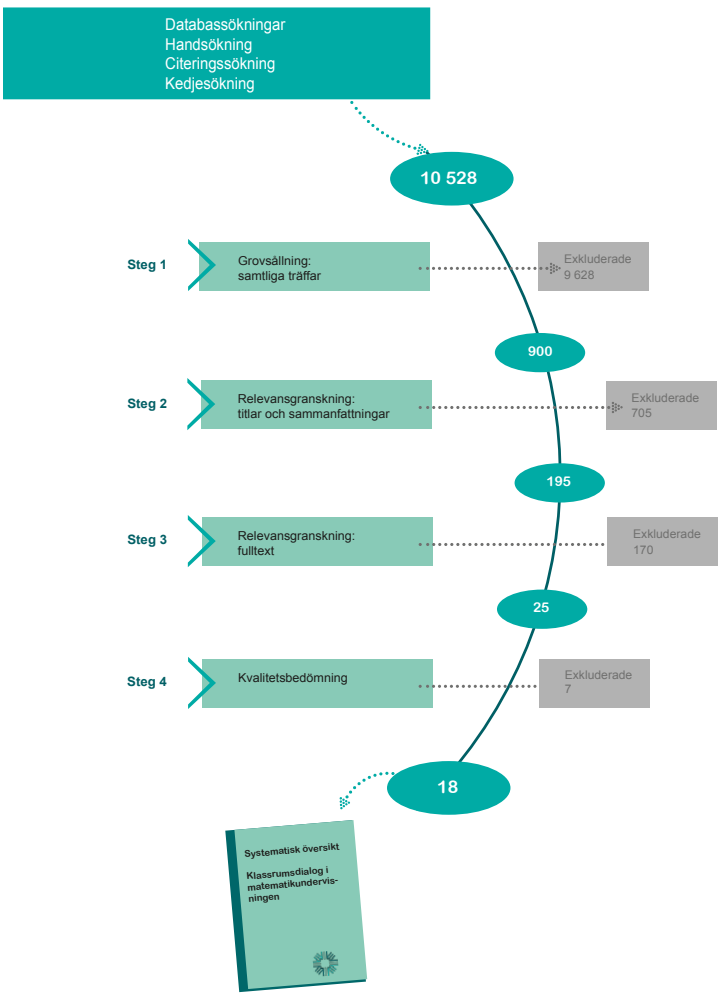
Kapitel 2
Om denna översikt

2. Om denna översikt

2.1 Urvalet av forskning

Vi har genom litteratursökningar och ett systematiskt urval som gjordes av projektgruppens externa forskare, vilka arbetar inom området, identifierat arton forskningsstudier. Som framgår av figuren nedan resulterade litteratursökningen i 10 528 träffar. Det slutliga urvalet baserades på en bedömning av studiernas relevans och kvalitet.

FIGUR 2. Flödesschema



Alla arton studier bygger på forskares observationer och analyser av matematiska samtal i helklass mellan lärare och elever. Det är klassrumssituationer som lärare kan känna igen sig i. Forskarnas analyser sätter ord på det som sker och ger förståelse i form av olika begrepp och strukturer.

Artiklarna handlar om vad som karaktäriserar lärares ledning och elevers deltagande i klassrumsdialoger som engagerar elever i gemensamma matematiska resonemang. Artiklarna har dock lite olika fokus, och kompletterar på så vis varandra. Exempelvis ingår forskning om vad som karakteriserar elevers deltagande i gemensamma resonemang och forskningen skiljer här mellan disputerande, kumulativa och utforskande samtal. Likaså ingår forskning som tar utgångspunkt i vissa så kallade sociomatematiska normer, och karakteriserar elevers deltagande i själva matematiken i de gemensamma resonemangen. Resultaten från samtliga studier i urvalet har vi ställt samman till en nyanserad förståelse av klassrumsdialog i matematikundervisningen.

I slutet av resultatkapitlet (s. 45–47) finner ni en översiktlig tabell som beskriver varje studie i korthet, bland annat resultaten i de enskilda studierna. Tabellen anger också i vilken årkurs/vilka årskurser studierna är genomförda och det framgår att samtliga studier är från grundskolan. Vidare beskrivs det matematikinnehåll som behandlas, vilket varierar mellan studierna. Tabellen visar även att det är en klar övervikt av studier från engelskspråkiga länder, undantagen är studier från Israel, Nederländerna och Norge.

2.2 Läsanvisning

Resultatkapitlet som nu följer inleds med ett avsnitt om vad som kännetecknar klassrumsdialog som engagerar elever i matematiska resonemang. Därefter går vi närmare in på hur lärarna gör för att få med eleverna i sådana samtal. Det avsnittet har fokus på lärares handlingar. Först handlar det om hur lärarna i studierna underlättar elevernas deltagande i gemensamma resonemang, därefter följer ett avsnitt om hur lärarna gör för att rikta elevernas fokus mot matematiken i de gemensamma resonemangen. Det sista avsnittet i resultatkapitlet handlar om att lärare ibland behöver gå in och ytterligare stödja eleverna i samtalen och vi redovisar resultat om hur lärarna gör då.

Efter resultatkapitlet följer ett kapitel om metod och genomförande. Det handlar om hur vi gick till väga i arbetet med denna systematiska översikt.

De bilagor som hör till översikten återfinns på webbplatsen www.skolfi.se.

Kapitel 3
Resultat

3. Resultat

Det här kapitlet inleder vi med att ge en bild av vad forskningen säger om vad som kännetecknar den typ av klassrumsdialog som engagerar elever i gemensamma matematiska resonemang, och hur denna typ av samtal skiljer sig från andra typer av klassrumsdialog. Vi lyfter fram nyckelfaktorer som har identifierats av forskarna i studierna, som de anser vara av betydelse för hur klassrumsdialogen gestaltar sig. Därefter följer ett avsnitt i vilket vi redogör för specifika lärarhandlingar som beskrivs i de olika studierna, och vi visar på vilket sätt forskarna menar att de kan främja gemensamma matematiska resonemang. I det sista avsnittet i resultatdelen beskriver vi situationer i undervisningen då läraren kan behöva gå in och leda samtalen i högre utsträckning och hur läraren då kan göra. I slutet av kapitlet , på s. 45–47, har vi sammanställt en tabell över de arton studierna som ligger till grund för resultatet. I tabellen anges författare, titel, publiceringsår, vilket land studien har utförts i samt matematiskt innehåll och studiens huvudsakliga resultat.

3.1 Utforskande samtal – elever uttrycker sina egna idéer och engagerar sig i andras

En utgångspunkt för översikten är att samtalen i matematikklassrum kan se olika ut och på så vis ge olika förutsättningar för elevers deltagande och lärande. Tre olika typer av klassrumsdialog beskrivs i forskningen. Dessa dialogtyper benämns disputerande samtal, kumulativa samtal och utforskande samtal (Hunter, 2014; Mercer & Sams, 2006). Skillnaderna handlar framför allt om i vilken mån eleverna engagerar sig i varandras idéer. I disputerande samtal är eleverna inriktade på att försvara och behålla kontrollen över sina egna idéer, snarare än att engagera sig i och försöka förstå och dra lärdom av sina klasskamraters idéer. I kumulativa samtal, å andra sidan, accepterar eleverna okritiskt de andra elevernas idéer. Eleverna utvärderar alltså inte varandras påståenden eller lösningar, utan godtar dem utan omsvep. I de utforskande samtalen däremot, uttrycker och motiverar eleverna sina egna idéer men engagerar sig också i klasskamraternas idéer och försöker på så sätt nå en gemensam förståelse. Det är alltså de utforskande samtalen som innebär att eleverna deltar i vad man kan betrakta som gemensamma matematiska resonemang, vilket är den typ av samtal som står i fokus för denna översikt. [2]

2 Benämningarna på den här typen av dialog skiljer sig mellan studierna, men vi uppfattar att det man talar om i samtliga fall har stora likheter, och att begreppet utforskande samtal (exploratory talk) fångar in huvuddragen i det som avses. Vi har därför valt att använda detta begrepp. Några andra benämningar är argumentation-based inquiry (Makar, Bakker & Ben-Zvi, 2015), och inquiry based mathematics (Kazemi & Stipek, 2001).

Utforskande samtal innebär enligt Mercer och Sams (2006)[3] att

- all relevant information delas
- alla deltagare i en grupp inbjuds att bidra till diskussionen
- åsikter och idéer respekteras och beaktas
- alla uppmanas att klargöra sina skäl (motivera/argumentera)
- utmaningar och alternativ görs tydliga och förhandlas
- gruppen försöker nå enighet innan de tar beslut och agerar.

(Mercer & Sams, 2006, s. 512)

Utforskande samtal beskrivs i några av studierna i kontrast till det samtalsmönster som kallas IRE (Henning, McKeny, Foley, & Balong, 2012). IRE står för initiering, respons och evaluering. I detta samtalsmönster dominerar läraren samtalet och eleverna bidrar i begränsad utsträckning. Samtal enligt IRE inleds oftast med en fråga som läraren ställer till eleverna (initierar), varpå eleverna svarar (responderar), varefter läraren utvärderar (evaluerar) elevernas svar. Lärarens frågor har då ofta bara *ett* rätt svar. Den här typen av frågor kallas ibland för stängda frågor och kännetecknas av att de är utvärderande snarare än utforskande. Det vill säga att de kontrollerar att (eller om) eleverna har förstått snarare än hur de har förstått. Öppna frågor, däremot, kan ha flera svar som (alla) är rätt. De olika svaren på öppna frågor kan exempelvis representera skilda synsätt, såsom alternativa lösningsstrategier på ett problem. Öppna frågor om hur eleverna förstår något ger läraren möjlighet att ta tillvara elevers olika idéer i klassrummet.

Detta knyter an till lärarens respons på de idéer som eleverna uttrycker. I det utforskande samtalet tas elevernas idéer tillvara och används som en resurs för att fördjupa elevernas matematiska förståelse. Elevernas idéer bekräftas och värdesätts och blir en utgångspunkt för det fortsatta samtalet (Hufferd-Ackles, Fuson & Sherin, 2004).

Fyra nyckelfaktorer med betydelse för hur klassrumsdialogen gestaltar sig

Utforskande samtal kännetecknas av att elever uttrycker sina matematiska idéer och engagerar sig i andra elevers matematiska idéer. Eleverna deltar alltså genom att motivera, jämföra och utvärdera påståenden. Läraren, å sin sida, stödjer elevernas deltagande i samtalen genom att ställa öppna frågor, lyssna på och ta tillvara elevernas tankar och uppmuntra elevers engagemang i andra elevers matematiska idéer. Vi ska nu utveckla detta genom att utgå från Hufferd-Ackles och kollegors (2004) redogörelse för fyra nyckelfaktorer som har betydelse för hur dialogen i klassrummet gestaltar sig, nämligen:

- Vem som ställer frågor och vilken typ av frågor som ställs.
- Vem som förklarar och motiverar matematiska idéer.

3 MED REFERENS TILL BARNES, D.R. OCH TODD, F. (1995). COMMUNICATION AND LEARNING REVISITED: MAKING MEANING THROUGH TALK. PORTSMOUTH, NH: BOYNTON/COOK PUBLISHERS.

- Vem som bidrar med matematiska idéer.
- Vem som tar ansvar för lärandet och utvärderingen av matematiska resonemang.

I det följande redogör vi för tre studier som relaterar till dessa nyckelfaktorer.

En klassrumsresa mot utforskande samtal

Vi börjar med den studie i vilken Hufferd-Ackles och kollegor (2004) redogör för de fyra nyckelfaktorerna. I studien följer forskarna en lärare och hennes elever under ett läsår. Studien visar hur samtalen i matematikklassrummet förändras i förhållande till de fyra nyckelfaktorerna. Förändringen går i riktning mot utforskande samtal. Processen sammanfattas nedan. En mer utförlig beskrivning återfinns i slutet av detta avsnitt.

Läraren i studien har endast ett års erfarenhet av undervisning. Som en del i studien inför läraren ett nytt forskningsbaserat arbetssätt med betoning på gemensamma matematiska resonemang. Lärarna får stöd i denna förändring vid återkommande möten med kollegor. Varken läraren eller eleverna i studien är vana vid utforskande samtal när studien inleds. Det gör det möjligt att följa både lärarens och elevernas förändrade roller och beteenden under studiens gång.

– Vem ställer frågorna och vilken typ av frågor ställs? Inledningsvis är läraren den enda som ställer frågor, och då framför allt stängda frågor. Elevernas (korta) svar på dessa frågor är också i huvudsak elevernas bidrag till samtalen – de ställer själva inga frågor. Den förändring som kan iakttas mot slutet av studien är att lärarens frågor förändrats. Syftet med frågorna blir nu snarast att utforska elevernas tankar och idéer. Läraren ställer öppna frågor, eller frågor som följer upp elevers idéer. Eleverna ställer nu också frågor till varandra och många av dessa är varför-frågor som kräver en motivering.
– Vem förklarar och motiverar matematiska idéer? Inledningsvis syns få initiativ från läraren för att locka eleverna att dela med sig av sina idéer, strategier eller förklaringar. Som nämndes ovan är de frågor som läraren ställer inriktade på ett visst (kort) svar, och elevernas enda bidrag är deras (ofta korta) svar på dessa frågor. Förändringen innebär att läraren lyssnar noga på det eleverna säger och uppmuntrar eleverna att utveckla sina förklaringar och fördjupa sina matematiska resonemang. Eleverna förklarar och motiverar nu sina idéer.
– Vem bidrar med matematiska idéer? Inledningsvis står läraren ofta vid tavlan med en penna i handen och förklarar för eleverna. Eleverna bidrar inte med sina matematiska idéer. Förändringen innebär att läraren följer upp elevernas förklaringar och bygger vidare på dem. Elevernas felsvar används som möjligheter till lärande. Läraren tillåter att hennes förklaringar avbryts av eleverna. Eleverna uppvisar en säkerhet när det gäller de egna idéerna, även om dessa skiljer sig från andra elevers idéer. De bidrar med sina idéer när läraren eller andra elever resonerar, de jämför och de kontrasterar idéer.

– Vem tar ansvar för lärandet och utvärderingen av matematiska resonemang?
I inledningen upprepar läraren det svar hon får från en elev för hela klassen och bemöter det, antingen genom att bekräfta att det är rätt eller genom att visa den korrekta metoden. Eleverna är passiva lyssnare. Förändringen innebär att läraren uppmuntrar och förväntar sig att eleverna tar ansvar för att gemensamt utvärdera allas arbeten och idéer. Läraren hjälper till och följer upp vid behov. Eleverna hjälper nu varandra att förstå; de tar initiativ till att klargöra egna och andras idéer. Att ett resonemang håller matematiskt blir kriteriet för att resonemanget ska accepteras, snarare än lärarens bekräftelse.

Ökat fokus på själva matematiken

Vi ska uppehålla oss lite vid den nyckelfaktor som har med frågorna i matematikklassrummet att göra – vem som ställer dem och vilken typ de är av – med resultat från en annan studie som också den beskriver hur lärares och elevers roller förändras parallellt över tid (McCrone, 2005). Studien pågår i sex månader. Läraren i studien har lång erfarenhet av arbete som lärare men anser sig vara svag i matematik. Hon har under en tid haft ambitionen att utveckla sin förmåga att leda elever i gemensamma matematiska resonemang och har tidigare deltagit i fortbildning i matematikdidaktik. Vid återkommande möten träffar hon kollegor och pratar om hur man kan leda utforskande samtal.

Studien av McCrone fokuserar på en annan aspekt av denna nyckelfaktor än vad Hufferd-Ackles och kollegor gör. Förändringarna gäller här snarast *vad* läraren och eleverna fokuserar på i samtalen, och innebär i grova drag att fokus flyttas från procedurer till själva matematiken. Tidigt i studien är lärarens frågor i huvudsak inriktade mot själva utförandet, alltså hur eleverna går tillväga då de löser en uppgift (proceduren). Det är framförallt frågor på detaljnivå angående tillämpningen av en viss lösningsstrategi, exempelvis Vad gjorde ni sedan? Elevernas bidrag består då främst av beskrivningar av de olika stegen vid lösningen av en uppgift, eller av numeriska svar utan förklaringar.

Det förekommer också inledningsvis i begränsad omfattning att läraren ställer frågor om den matematiska strukturen i en uppgift (McCrone, 2005). Det kan vara frågor om matematiska egenskaper hos en lösning eller en lösningsstrategi, exempelvis Hur kan ni använda division i det ni menar är ett problem som handlar om att subtrahera?. Denna typ av frågor blir dock allt vanligare mot slutet av första terminen. Då syns också förändringar i elevernas deltagande, på så vis att eleverna börjar motivera sina lösningsstrategier matematiskt. De börjar då också ställa frågor om och efterfråga motiveringar av andra elevers lösningar.

Mot slutet av första terminen börjar läraren även använda en ny typ av frågor, så kallade teoriorienterade frågor (McCrone, 2005). Läraren kan be eleverna beakta en situation eller ett begrepp som relaterar till något man tidigare diskuterat, men ännu inte utforskat, genom att exempelvis ställa frågan Hur vet du när du har ett mönster? Nu syns en ökad vilja bland eleverna att förklara och motivera sina lösningar, att reflektera över

och bemöta andra elevers idéer och att utforska nya matematiska situationer.

Att ta ett steg tillbaka och ge stöd vid behov

Vi ska avslutningsvis uppehålla oss vid den av nyckelfaktorerna i studien av Hufferd-Ackles och kollegor som handlar om att ta ansvar för lärandet. I en process mot utforskande samtal tar alltså eleverna allt större ansvar för att själva göra sig förstådda och för att förstå klasskamraternas resonemang. Läraren hjälper till och ger stöd vid behov. Detta är en förändring som även beskrivs i McCrones studie. Förändringen innebär att läraren efter hand tar några steg tillbaka. Det är inte längre lika vanligt att läraren ger stöd och exemplifierar med lämpliga lösningsstrategier för eleverna. I stället försöker läraren underlätta elevernas diskussioner genom att tolka deras lösningar och uppmuntra eleverna att bemöta varandras idéer. Detta illustreras i **fetstil** i utdraget nedan. Utdraget visar också att eleverna tar ansvar för att utforska egna och andras idéer. De uttrycker sina idéer, jämför lösningsmetoder och anstränger sig för att förstå andras idéer.

Den uppgift som elever och lärare diskuterar i McCrones studie är en så kallad magisk cirkel. Vi förklarar inte denna närmare eftersom vi bedömer att det inte behövs för att elevernas engagemang i varandras idéer och lärarens sätt att underlätta resonemanget ska framgå.

Kenny:	Hm … vi har de sju cirklarna här … och summan ska bli 12, vilket är ett jämnt tal. Så jag tror att man måste sätta ett jämnt tal [i mittencirkeln]. Men om man vill få 11 eller något annat, typ 13, då tror jag att man borde sätta ett ojämnt tal i mitten.
Margaret:	Det var vad jag tänkte.
Läraren:	**Bara för att vara säker på att alla hänger med … Så du säger Kenny, att när summan är ett jämnt tal …**
Kenny:	Om summan är ett jämnt tal så måste man sätta ett jämnt tal i mittencirkeln, här. Men om summan är ett ojämnt tal som 13 så måste man ha ett ojämnt tal i mitten.
Läraren:	**Vill någon svara på det genom att titta på exemplen som står på tavlan? Margaret?**
Margaret:	Det Kenny sade är logiskt men hm …. men det där exemplet, Lisas svar (på problemet med fem cirklar) är 8, och hennes tal i mitten är 1.
Läraren:	**Okej. Hon testar Kennys teori … Hon vill att vi tittar på Lisas .**
Nikki:	Det är samma sak när summan blir tiotal. [Pekar på att exemplet med fem cirklar som resulterade i summan av 10 också hade ett ojämnt tal i mitten.]

Kenny: Joo, jag såg summan av 10 och tänkte att, alltså 10 kan vara både jämnt och ojämnt eftersom du kan uppnå det med både femmor eller tvåor. Men jag tittade inte på Lisas exempel.

Läraren: **Kan vi gå tillbaka till vad du just sade, att 10 kan vara både ett jämnt och ojämnt tal?**

(McCrone, 2005, s. 125)

Detta avsnitt avslutas med en fullständig återgivning av Hufferd-Ackles och kollegors schematiska beskrivning av lärarens och elevernas förändrade roller i förhållande till de fyra nyckelfaktorerna. Förändringen över tid beskrivs i olika nivåer (0–3) i riktning mot utforskande samtal. Beskrivningen ger en tydlig illustration av att lärares och elevers beteende förändras parallellt, något som understryker lärarens betydelse för elevers deltagande i utforskande samtal. För ytterligare resultat som beskriver lärare och elevers parallella förändringar, se Hunter (2012) och Baxter och kollegor (2002).

Tabell 1. Nivåer i lärares och elevers förändrade roller vid utvecklingen mot utforskande samtal (Hufferd-Ackles m.fl., 2004, s. 88–90).

Vem ställer frågorna och vilka frågor ställs? – förändring från att läraren är den som ställer frågor till att eleverna ställer frågor		
Nivå	Lärare	Elev
Nivå 0	Läraren är den enda som ställer frågor. Många korta frågor för att eleverna ska fortsätta lyssna på läraren.	Eleverna ger korta svar på lärarens frågor. Inga matematiska samtal mellan eleverna.
Nivå 1	Läraren börjar fokusera mer på elevernas tänkande och mindre på deras svar. Läraren ställer uppföljande frågor om elevers metoder och svar. Läraren är fortfarande den enda som ställer frågor.	När en elev svarar på en fråga lyssnar de andra eleverna passivt eller väntar på sin tur.
Nivå 2	Läraren fortsätter att ställa utforskande frågor och ställer även här fler öppna frågor. Läraren underlättar också samtalen mellan eleverna genom att exempelvis be eleverna förbereda sig på att ställa frågor om andra elevers arbeten.	Eleverna ställer frågor om andra elevers arbeten som redovisas på tavlan, ofta på lärarens uppmaning. Eleverna lyssnar på varandra så att de inte upprepar frågor.
Nivå 3	Läraren förväntar sig att eleverna ställer frågor till varandra om deras arbeten. Lärarens frågor kan fortfarande guida samtalen.	Samtal mellan eleverna är elevinitierade och inte beroende av läraren. Eleverna ställer frågor och lyssnar på svar. Många frågor är varförfrågor som kräver motivering av den som svarar. Eleverna repeterar sina egna eller andras frågor tills de är nöjda med svaren.

Förklara hur man tänker – förändring mot att eleverna oftare förklarar och motiverar sina matematiska idéer

Nivå	Lärare	Elev
Nivå 0	Inga eller få lärarhandlingar för att locka eleverna till att dela med sig av sitt tänkande, sina strategier eller förklaringar; läraren förväntar sig svarsfokuserad respons från eleverna.	Inga förklaringar av det egna tänkandet eller av strategier. Eleverna svarar bara på lärarens frågor.
Nivå 1	Läraren utforskar elevers tänkande till viss del. En eller två strategier lockas fram. Läraren fyller ibland själv i förklaringarna.	Eleverna delar med sig av sitt matematiska tänkande, vanligen då det efterfrågas av läraren. Få elever som gör det på eget initiativ. De ger korta beskrivningar av sitt tänkande.
Nivå 2	Läraren utforskar mer djupgående i syfte att lära sig om elevernas tänkande och ger stöd för detaljerade beskrivningar av eleverna. Läraren öppnar för och lockar fram flera olika strategier.	Eleverna ger vanligen information då det efterfrågas av läraren, med vissa inslag av egna initiativ. De börjar ta ställning och ge uttryck för mer information som svar på lärarens uppmuntran. De förklarar olika steg i sitt tänkande genom att ge fylligare beskrivningar och de börjar försvara sina metoder och svar. Andra elever lyssnar stödjande.
Nivå 3	Läraren lyssnar noga på elevernas beskrivningar av sitt tänkande och uppmuntrar eleverna att göra sina förklaringar mer fullständiga, bland annat genom att ställa utforskande frågor. Läraren stimulerar eleverna att tänka ingående om strategier.	Eleverna beskriver mer kompletta strategier; de försvarar och motiverar sina svar, med endast lite uppmaning från läraren. Eleverna inser att de kommer att behöva svara på frågor från andra elever när de är klara, så de är motiverade och måna om att vara grundliga. Andra elever ger stöd genom aktivt lyssnande.

Källan till matematiska idéer – förändring från läraren som källa till alla matematiska idéer till att elevernas idéer också påverkar riktningen på lektionen

Nivå	Lärare	Elev
Nivå 0	Läraren står vid tavlan, vanligen med en penna i handen och berättar och förklarar för eleverna hur de ska göra.	Eleverna svarar på det matematikläraren presenterar. De bidrar inte med egna matematiska idéer.
Nivå 1	Läraren är fortfarande den huvudsakliga källan till idéer, även om läraren också lockar fram egna idéer hos eleverna.	Några av elevernas idéer tas upp i diskussionen, men de utforskas inte.
Nivå 2	Läraren följer upp förklaringar och bygger vidare på dem genom att be eleverna att jämföra och kontrastera. Läraren känner sig bekväm med att använda elevers felsvar som möjligheter till lärande.	Eleverna visar självförtroende när det gäller deras egna idéer och delar sitt tänkande och sina strategier, även om de skiljer sig från andra elevers idéer. Elevernas idéer styr ibland riktningen på matematiklektionen.
Nivå 3	Läraren tillåter att hens förklaring avbryts av eleverna. Eleverna får förklara och äga nya strategier även om läraren fortfarande är engagerad och avgör vad som är viktigt att fortsätta utforska. Läraren använder elevers idéer och metoder som grund för lektionen eller för att göra små utvikningar.	Eleverna skjuter in idéer när läraren undervisar eller andra elever pratar, säkra på att deras idéer är viktiga. Eleverna jämför, kontrasterar och bygger vidare på andras idéer spontant. Elevers idéer formar delar av innehållet i många matematiklektioner.

Ta ansvar för lärande och utvärdering – förändring mot att eleverna i ökande utsträckning tar ansvar för lärande och utvärdering av sina egna och andras resonemang. Matematisk mening är kriteriet för utvärdering.		
Nivå	Lärare	Elev
Nivå 0	Läraren upprepar elevernas svar (som riktar sig till läraren) för klassen. Läraren responderar på elevers svar genom att bekräfta rätt svar eller visa den korrekta metoden.	Eleverna är passiva lyssnare; de försöker imitera läraren och tar inte ansvar för sina klasskamraters lärande eller för sitt eget.
Nivå 1	Läraren börjar skapa strukturer för att underlätta för elever att lyssna på och hjälpa andra elever. Endast läraren ger feedback.	Eleverna blir mer engagerade genom att upprepa vad andra elever säger eller genom att på lärarens uppmaning hjälpa andra elever. Hjälpen består mest i att eleverna visar hur de har löst ett problem.
Nivå 2	Läraren uppmuntrar eleverna att ta ansvar för att förstå andra elevers matematiska idéer. Läraren ställer frågor om andra elevers arbeten, om de håller med eller inte, och varför.	Eleverna börjar lyssna för att förstå varandra. När läraren ber dem, förklarar eleverna andra elevers idéer med egna ord. Att hjälpa andra elever inbegriper att klargöra andras idéer för hela gruppen. Eleverna imiterar lärarens uppmuntran i pararbete och i helklassdiskussioner.
Nivå 3	Läraren förväntar sig att eleverna tar ansvar för att gemensamt utvärdera allas arbeten och tankegångar. Hen stödjer eleverna när de hjälper varandra att reda ut missuppfattningar. Hen hjälper till och följer upp vid behov.	Eleverna lyssnar för att förstå, de tar initiativ till att klargöra andra elevers arbete och idéer under helklassdiskussioner såväl som i smågrupper och arbeten i par. Eleverna hjälper varandra att förstå och att rätta felsvar.

3.2 Lärarhandlingar med utforskande samtal som mål

I förra avsnittet berörde vi lärarens roll i utforskande samtal i matematikklassrummet. Vi beskrev vad som karakteriserar den här typen av samtal i relation till andra typer, dvs. disputerande samtal, kumulativa samtal och IRE-modellen. Likaså belystes beskrivningar av lärares och elevers parallella utveckling mot utforskande samtal och lärarens betydelse för hur samtalen gestaltar sig. I detta avsnitt kommer vi att gå närmare in på specifika lärarhandlingar som beskrivs i studierna – lärarhandlingar som har som mål att bidra till att samtalen i matematikklassrummet blir mer utforskande. Med lärarhandling avser vi något som läraren gör eller säger.

Vi börjar med ett avsnitt om de lärarhandlingar som syftar till att få eleverna att över huvud taget delta aktivt i gemensamma resonemang. Det handlar i mångt och mycket om handlingar som syftar till att etablera gynnsamma sociala normer i klassrummet och som bäddar för utforskande samtal.

Det efterföljande avsnittet handlar om lärarhandlingar som syftar till att få elevernas gemensamma resonemang att handla om matematik. I de utvalda studierna framgår nämligen att elever mycket väl kan delta i gemensamma resonemang i matematik-

undervisningen, utan att samtalen faktiskt rör själva matematiken på ett djupare plan. Detta sker till exempel när eleverna enbart har fokus på procedurella aspekter i sina resonemang.

Forskningen ger inga enkla svar

Vi vill först betona att forskningen inte kan erbjuda några enkla svar på vilka lärarhandlingar som bidrar till att eleverna engagerar sig i utforskande samtal. Av studierna framgår snarast att det inte är möjligt att komma med enkla anvisningar som fungerar oavsett sammanhang. Fenomenet klassrumsdialog är alltför komplext. Cengiz och kollegor (2011) uttrycker det så här:

> The findings on instructional actions provide further evidence of the complexity of the work of extending student thinking. While having a list of instructional actions as potential steps to take could be helpful, a recipe for which actions to take and what order of actions to follow at any given moment during a whole-group discussion does not exist. In fact, this study demonstrates how some actions could be quite effective in some cases and not effective in others (Cengiz m.fl., 2011, s. 372).

En handling kan alltså, enligt Cengiz och kollegor, vara effektiv i ett sammanhang men inte i ett annat. I samma studie konstateras dessutom att en elevs engagemang i utforskande samtal kan föregås av en kombination av flera olika slags handlingar.

Komplexiteten hos utforskande samtal understryks även av Franke och kollegor (2015), som har studerat relationen mellan lärarhandlingar och elevengagemang. Forskarna identifierar ett antal lärarhandlingar som syftar till att få eleverna att engagera sig i andra elevers idéer. Handlingarna är av olika slag, som att läraren ber eleverna förklara någon annan elevs lösning eller jämföra flera elevers olika lösningar. Studien ger emellertid inget stöd för ett samband mellan någon specifik typ av lärarhandling och elevernas engagemang i andra elevers idéer. Studien visar dessutom att det finns många olika skäl till att elever inte engagerar sig i andra elevers idéer, och att eleverna därför kan behöva olika typer av stöd. En elev kan exempelvis behöva stöd för att se hur den egna förklaringen förhåller sig till en annan elevs förklaring, medan en annan elev snarast kan behöva stöd för att utveckla sitt engagemang i andra elevers förklaringar.

Ayalon och Even (2016) slutligen, visar att elevers möjligheter till deltagande i utforskande samtal är beroende av ett komplext samspel mellan det läraren gör, matematikinnehållet och klassen. De konstaterar följande:

> For research aiming to learn about 'good' pedagogical models for encouraging argumentation, the findings from this study suggest that a teacher approach that might be considered good in one class is not necessarily good in another (Ayalon & Even, 2016, s. 597).

Komplexiteten i klassrumsdialoger till trots, så ger de utvalda studierna användbar

kunskap om både lärarhandlingar med potential att engagera eleverna i utforskande samtal och på vilket sätt dessa handlingar har betydelse för elevers engagemang.

Att skapa ett utforskande klassrumsklimat

Elevers deltagande i utforskande samtal skiljer sig som vi tidigare beskrivit från deltagande i samtal enligt IRE-modellen.[4] Det handlar i det utforskande samtalet inte främst om att försöka svara rätt på lärarens frågor, utan om att bidra med egna idéer, motivera dem och att själv ställa frågor. Elever förväntas alltså bete sig på ett annat sätt, eller annorlunda uttryckt: de sociala normerna för elevers deltagande i utforskande samtal skiljer sig från de som gäller vid IRE (Hunter, 2014; Kazemi & Stipek, 2001; Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2015). Normer kan sägas vara gemensamma förväntningar på beteendet i en viss social situation, en form av sociala spelregler. De är ofta outtalade och osynliga, åtminstone tills de förändras eller bryts.

Exemplifiera, förstärka och omformulera

Det lärarna i studierna gör för att etablera normer som lägger grund för utforskande samtal är att på olika sätt synliggöra vad som är önskvärda beteenden i matematikklassrummet, som till exempel att lyssna aktivt (Hunter, 2014; Makar m.fl., 2015).[5] Detta gör de på flera olika sätt, bland annat genom att ge exempel på önskvärda beteenden, förstärka elevbeteenden som är i linje med de förväntade, eller omformulera elevernas beskrivningar av vad de gör så att de normer läraren vill etablera tydliggörs.

Att det tydligt framgår hur eleverna förväntas bete sig kan underlätta deras deltagande i gemensamma resonemang. Uttalade förväntningar kan legitimera beteenden som eleverna annars skulle känna sig obekväma med, till exempel att ifrågasätta någon annans idé och be denne att motivera sitt påstående. De kan också stödja eleverna så att de vågar dela med sig av sina egna ibland ofullständiga idéer. På så vis kan läraren – genom att vara tydlig med vad som gäller i utforskande samtal – stödja elever som av olika skäl känner motstånd mot att delta (Parks, 2011).

I en av studierna följs en lärare som tillsammans med en forskare arbetar för att etablera normer för utforskande samtal i matematikklassrummet (Hunter, 2014). I studien beskrivs vad läraren gör för att få till stånd en förändring av rådande sociala normer, och hur samtalen förändras under en tremånadersperiod. Eleverna diskuterar inledningsvis inte så mycket, varken i helklass eller i grupp. I de fall de uttrycker sina idéer är de mer inriktade på att försvara dem än att samarbeta och försöka skapa en gemensam förståelse. De för alltså en form av disputerande samtal. Som ett första steg mot förändring av samtalen försöker läraren få eleverna att resonera tillsammans i mindre grupper. Läraren ger eleverna i uppgift att tillsammans skapa en matematisk förklaring som alla i gruppen förstår och kan förklara. De uppmanas först att diskutera sina lösningsförslag i gruppen. Läraren ger exempel på hur de kan agera.

4 IRE = INITIERING, RESPONS OCH EVALUERING

5 AKTIVT LYSSNANDE = ATT ENGAGERA SIG I OCH FÖRSÖKA FÖRSTÅ DET PERSONEN SÄGER

Läraren: Ni måste hjälpas åt och ni måste förstå, alla i gruppen behöver förstå strategin. Det duger inte om det bara är en person … ni måste försöka hjälpa resten av gruppen att förstå det.

Ruby: Man måste fråga om man inte förstår.

Läraren: Precis, sitt inte bara där och hoppas på att andra ska förklara för dig. Du måste själv ställa frågor.

(Hunter, 2014, s. 669)

Läraren betonar att aktivt lyssnande är viktigt genom att beskriva vad det innebär: Er uppgift är att verkligen tänka på vad andra elever säger och fundera över om ni håller med eller inte.

Läraren förstärker också de elevbeteenden som ligger i linje med de normer som hon önskar etablera (Hunter, 2014), till exempel då hon uppmärksammar övriga elever på en elev, Josies, beteende, och lyfter fram det positiva i att ta ansvar som grupp: Tack Josie för att du hjälper till att förklara. Ser ni vad hon gjorde? Det är vad jag menar, ta hjälp och stöd från gruppen.

Studien visar hur elevernas samtalsmönster successivt förändras (Hunter, 2014). Den första förändringen innebär bland annat att disputerande samtal blir mindre vanliga. Fortfarande tenderar eleverna dock att okritiskt acceptera varandras resonemang. Eleverna för alltså en form av kumulativa samtal, exempelvis ber de inte sina klasskamrater att motivera och argumentera för sina idéer. Det illustreras i följande exempel där eleverna Heath och Sangeeta föreslår olika strategier för att lösa uppgiften, men där skillnader och likheter mellan strategierna inte utforskas.

Elever har fått till uppgift att räkna ut hur mycket de måste spara för att köpa en t-shirt som kostar 17 dollar. De har redan nio dollar.

Heath: Eftersom det är nio så kan du bara addera upp till tio, och sen måste du lägga till sju och så tar du bort ett igen och plussar på den på sju så att du får åtta.

Sangeeta: Ett annat sätt du kan göra det på är … du kan dra bort ett från sju och lägga till och på så sätt så får du tio, ett tiotal, och sen …

Ruby: Och på så sätt ser du hur mycket som behövs för att få sjutton.

(Hunter, 2014, s. 670)

För att få eleverna att kritiskt granska varandras resonemang ger läraren exempel på vad eleverna kan säga när de inte håller med om en förklaring som ges av en annan elev.

Lärare: Vad händer om ni inte kommer överens?

Mike: Om vi inte kommer överens så fråga varför … varför gjorde du så där?

Lärare: Ni kan säga: Jag är inte säker på det där, jag är inte övertygad om den där delen. Kan du övertyga mig?

(Hunter, 2014, s. 670)

Ett dialogutdrag från slutet av tremånadersperioden illustrerar hur samtalen förändrats så att eleverna nu inte bara accepterar andra elevers påståenden, utan också ber dem motivera dem (Hunter, 2014). Eleverna i exemplet diskuterar en uppgift som handlar om att finna ett mönster i antalet personer som kan sitta vid ett bord, då ett, tre eller fem bord läggs till. Notera Josies krav på argument för den lösning Heath föreslår.

Heath: Du lägger till tre till varje bord och sen gäller det att plussa på två.

Josie: Varför är det inte fem plus fem?

En annan elev [Matthew] engagerar sig nu för att gemensamt utveckla förklaringen och motivera den. Josie fortsätter att efterfråga motivering.

Matthew: [pekar på modellen] Eftersom du inte kan sätta någon där.

Josie: Men varje bord ska kunna ta fem personer.

Heath: Ja, men vid ett bord är det fem, det börjar med fem och sen får man …

Hayden: Du kan ju inte sätta någon mitt i bordet. De kan inte sitta här [pekar på mitten av modellen] eftersom de skulle sitta på bordet … De på kanten måste alltid flytta ut.

(Hunter, 2014, s. 678)

Även en annan studie beskriver hur läraren gör för att etablera normer för utforskande samtal i en klass, och hur samtalen förändras över tid (Makar m.fl., 2015). Studien pågår under ett halvår. Läraren fokuserar på att etablera normer som innebär att eleverna

- lyssnar aktivt
- motiverar och förklarar för sina klasskamrater
- tar intellektuella risker, till exempel delar med sig av ofullständiga idéer
- bygger på varandras idéer.

En strategi som läraren i studien använder är att skriva upp vad som karakteriserar den typ av gemensamma resonemang som hon vill ha i sitt klassrum på affischer som sedan sätts upp i klassrummet. En av affischerna anger lärarens förväntningar på elevernas roller i de gemensamma resonemangen:

– Aktiva lyssnare (reflektera över andras idéer)
– Tydliga talare som går att höra
– Aktiva deltagare (att elever bidrar)

En annan affisch anger lärarens förväntningar på elevernas samarbete:

- Det är möjligt att använda mer än en metod och ändå nå en konklusion
- Alla idéer och åsikter är viktiga
- Alla förväntas tänka
- Idéer ifrågasätts eller utmanas respektfullt

(Makar m.fl., 2015, s. 1113)

Läraren refererar då och då till det som står på affischerna för att förstärka elevers beteenden. I en intervju talar läraren om detta: Förstärka, bekräfta och värdera … när du faktiskt ser bevis på det – om du vill ha en sådan klassrumskultur, så belönar du det [beteendet].

Vi ska ge två exempel på elevdialoger från inledningen av samma studie (Makar m.fl., 2015). De illustrerar att en del elever agerar enligt de normer som läraren avser att etablera, och andra inte. Det första exemplet är en dialog mellan Bill och Chloe, vilka resonerar enligt normen förklara och motivera påståenden. Bill motiverar inledningsvis sin förklaring och Chloe kunde ha nöjt sig med att hålla med, men hon uppmanar Bill att motivera sin förklaring ytterligare. När Bill inte gör det så förklarar och motiverar hon sitt svar.

Bill:	Gräshoppan vann eftersom en tredjedel är mer och större än en fjärdedel.
Chloe:	[riktar sig mot Bill] **Kan du bevisa det?** [Bill tvekar så Chloe börjar.] Okej, jag skrev att en tredjedel är större än en fjärdedel. Jag ritade en bild och sen [hon pekar på sin teckning] där är det en fjärdedel, den är mindre eftersom den inte är lika stor. Sen skrev jag på tallinjen , och jag ritade även en [bråk] vägg …
Bill:	Det är bra, bra. Jag måste skriva av några idéer.

(Makar m.fl., 2015, s. 1114)

Det andra exemplet visar att normerna inte anammats av alla elever i klassen. Shane agerar enligt normen att förklara sitt svar, men hans ord ”så var vi klara” antyder att han inte är intresserad av att höra Ellas förklaring.

Shane:	Sen skrev jag att gräshoppan hoppar en tredjedel varje gång så den behöver bara hoppa 12 gånger. Skalbaggen måste hoppa 15 gånger (sic) och sen ritade jag gräshoppan och hur den har, hmm, tre fjärdedelar, jag menar tre tredjedelar. Och sen skalbaggen. Jag skrev att den hade en fjärdedel.
Ella:	Jag gillar verkligen …

Shane: [avbryter] – och så skrev jag att gräshoppan skulle vinna.

Ella: Jag gillar verkligen all information du ger.

Shane: Mmm, och så var vi klara!

(Makar m.fl., 2015, s. 1114)

Läraren i studien rör sig mellan elevgrupperna och ger stöd vid behov. Ibland påminner hon eleverna om att alla i gruppen förväntas bidra. Av studien framgår att förändringen av normer tar tid och kräver kontinuerligt stöd, eleverna behöver ständigt påminnas om förväntningarna på deras deltagande.

Från samma studie får vi också exempel på hur lärare genom uttalade förväntningar på elevers beteenden legitimerar och stödjer beteenden som elever annars kan känna sig obekväma med (Makar m.fl., 2015). Det handlar bland annat om att eleverna förväntas be sina klasskamrater motivera sina påstående eller lösningsstrategier, vilket inte är ett typiskt beteende i matematikklassrum. Läraren exemplifierar förväntade beteenden genom att formulera ett antal frågor som eleverna kan ställa till varandra:

- Tänkte du på ...?
- Jag håller med/håller inte med.
- Bygg vidare på denna idé.
- Berätta mer om …
- Kan du bevisa detta för oss?
- Dina bevis …
- Vad övertygade dig om att detta var svaret?

(Makar m.fl., 2015, s. 1115)

Dessa frågor och påståenden skrivs ner på ett papper som klistras in i elevernas skrivböcker. Läraren refererar sedan till dem vid flera tillfällen under arbetets gång. Forskarna konstaterar att elevernas försök att använda dessa inledningsvis är lite trevande och stela, men frågorna och påsteåndena ändå tjänar viktiga syften: de talar om för eleverna när och hur de kan bidra till de gemensamma resonemangen. På så vis 1) får eleverna hjälp att komma igång med att samtala, 2) legitimerar de elevernas, respektfulla, ifrågasättande av klasskamraternas idéer, och 3) etablerar de en förväntan och därmed en acceptans hos eleverna att själva få sina idéer ifrågasatta.

Hittills har vi gett exempel på hur läraren kan synliggöra önskvärda beteenden genom att exemplifiera och förstärka beteenden. En annan strategi med samma syfte är att läraren omformulerar elevernas beskrivningar av en dialogsituation (Makar m.fl., 2015). I nedanstående utdrag ber läraren en elev, Bill, beskriva hur han och hans klasskamrat gick tillväga i deras gemensamma resonemang. Hon omformulerar sedan Bills beskrivning och benämner det aktivt lyssnande. Lärarens omformulering syftar till att utveckla och förbättra elevens förmåga att beskriva de normer läraren försöker etablera i klassrummet.

Läraren: I dag var det två eller tre grupper som gjorde ett utmärkt jobb

i gemensamma resonemang. Så grattis till dessa sex personer. I själva verket var det något Bill gjorde [vänder sig till Bill], skulle du kunna dela med dig till alla. Vad gjorde du och din kamrat under de gemensamma samtalen?

Bill: Vi satt bredvid varandra och hm, det ger dig en bättre idé om vad det handlar om.

Läraren: Ja, så de delade med sig. I stället för att Bill sitter mittemot sin partner så satt de sida vid sida … Så när Jonah läste kunde Bill höra vad han sade, och han kunde också se vad han sade. Så han **lyssnade aktivt**, han tog varje tillfälle i akt att ifrågasätta vad Jonah sade och var en aktiv deltagare.

(Makar m.fl., 2015, s. 1113)

Som tidigare beskrivits så innebär deltagande i utforskande samtal att eleverna delar med sig av sina idéer, även ofullständiga. Eleverna kan på så vis bygga vidare på varandras idéer, och eventuellt felaktiga lösningar kan fördjupa de gemensamma matematiska resonemangen (Hunter, 2014; Kazemi & Stipek, 2001). Att dela med sig av idéer som man inte känner sig riktigt säker på är dock en form av intellektuellt risktagande och något elever kan tveka inför. Detta visar sig också i studien närmast ovan, där eleverna efter flera månaders arbete fortfarande kämpar med de normer som handlar om att dela med sig av sina ibland ofullständiga idéer (Makar m.fl., 2015).

Följande utdrag illustrerar lärarens arbete med att utveckla normer för att dela med sig av sina idéer och bygga vidare på dem (Makar m.fl., 2015). Eleverna har fått till uppgift att fundera ut den bästa vägen för en vandrande skolbuss. En vandrande skolbuss innebär att barn går tillsammans med sina kompisar till skolan, under uppsyn av en vuxen. Läraren använder en elevs, Chloes, förslag som utgångspunkt för diskussionen och illustrerar i sitt sätt att leda diskussionen hur man kan bygga på varandras idéer. Chloe har i sitt förslag delat in eleverna i två grupper: de som bor mindre än fem kilometer från skolan och de som bor längre bort från skolan än fem kilomter. Läraren frågar hela klassen om denna strategi kan ge svaret på frågan.

Lärare: Vilket är det typiska avståndet från skolan som elever [i denna klass] bor på? Om vi tittar på hur Chloe har organiserat våra uppgifter, kan vi då svara på frågan?

Chloe ser dock själv ett problem med strategin. En annan elev, Jinny, föreslår att de delar in eleverna i mindre grupper.

Chloe: Ja. [paus] Inte precis.

Lärare: Om jag frågar folk hur långt från skolan de bor, vad kan jag förvänta mig att få för svar efter vad vi har sett här?

Jinny: Vi kanske kan göra grupper för varje 100 meter. Om vi har

alla tillsammans så blir det svårare att organisera.

Läraren lyfter då upp Jinnys förslag och ber övriga elever reflektera över det.

Läraren: (…) Men Jinny säger att vi kan ge ett bättre svar. Jinny vill att vi gör svaret bättre genom att göra vad?

(Makar m.fl., 2015, s.1115–1116)

Läraren använder alltså Chloes och Jinnys förslag och ber klassen bygga vidare på dem (Makar m.fl., 2015). Eleverna uppmanas att reflektera över de olika förslagen och motivera sina idéer. Forskarna menar att läraren på så vis värdesätter Chloes och Jinnys bidrag och skapar en miljö där eleverna uppmuntras att resonera utan att bekymra sig om huruvida deras svar är rätt eller fel. Denna inbjudan till att tänka högt uppmuntrar eleverna att våga dela med sig även av ofullständiga idéer.

Avslutningsvis, en studie som visar hur läraren får eleverna att delta aktivt i utforskande samtal genom en form av rollspel (Elbers, 2003). Läraren ger eleverna och sig själv rollen som forskare. Varje lektion inleds med lärarens uppmaning: Vi är forskare. Låt oss forska! Rollen som forskare innebär för eleverna att de får ansvar för att lösa uppgifterna tillsammans; de kan inte förlita sig på läraren. Eleverna uppmuntras att ställa frågor och samarbeta för att finna svar på dem. Detta rollspel gör, enligt forskarna, att eleverna utvecklar nya samtalsmönster. Eleverna föreslår nya idéer och utforskar och utvärderar dem på ett sätt som gör att många elever kan såväl bidra som tillägna sig det som andra elever redan har upptäckt.

Lektionen som redovisas i studien är en av flera så kallade experimentlektioner som utformas i samarbete mellan en lärare och forskare (Elbers, 2003). Den genomförs en gång i veckan under en fyramånadersperiod, inom ramen för en annars traditionell undervisning. Forskarna menar att övergången från det bekanta undervisningssammanhanget till denna nya situation – där de förväntades vara forskare – innebar en viss ansträngning för eleverna. De beskriver att det var mycket identitetsrelaterade samtal bland eleverna om deras nya ansvar som medlemmar i en undersökande gemenskap.

Att skapa förutsättningar för samtal som rör själva matematiken

Utforskande samtal innebär, som vi har konstaterat tidigare, bland annat att eleverna förklarar och jämför olika matematiska lösningar. Men några av studierna som ingår i översikten visar att det är möjligt för elever att göra detta utan att de för den skull faktiskt diskuterar matematik (Kazemi & Stipek, 2001; McCrone, 2005). De kan till exempel beskriva hur de gick till väga, steg för steg, då de löste en uppgift, och på så vis förklara och jämföra sina respektive lösningar. Men så länge fokus är på de procedurella aspekterna tas inte tillfället i akt att diskutera matematiskt på ett djupare plan.

Kazemi och Stipek (2001) jämför dialogerna i fyra olika matematikklassrum. De konstaterar att i alla klassrummen tycks sådana normer råda som är utmärkande för

utforskande samtal: eleverna förklarar och delar lösningsstrategier, elevers felsvar accepteras som en del av praktiken, eleverna samarbetar, och arbetet leds av en positivt stödjande lärare. Men närmare analyser visar viktiga skillnader i kvaliteten på samtalen i de olika klassrummen. I samtliga klassrum förs visserligen gemensamma resonemang, men dessa resonemang rör inte alltid själva matematiken. I de klassrum där resonemangen faktiskt gör det råder – utöver gynnsamma sociala normer – vissa sociomatematiska normer.

Kazemi och Stipek (2001) menar att de sociala normer som tidigare har beskrivits är nödvändiga, men inte tillräckliga, för att eleverna ska engagera sig i matematiken på ett djupare plan. De sociomatematiska normer som de menar stödjer elevernas matematiska engagemang och begreppsliga utveckling är:

- En förklaring består av ett matematiskt argument, inte bara en procedurell beskrivning.
- Matematiskt tänkande innefattar att förstå relationer mellan strategier.
- Felsvar ger möjlighet till att omtolka ett problem, utforska motsägelser och utforska alternativa strategier.
- Samarbete innefattar individuellt ansvar och att komma överens genom matematisk argumentation.

(Kazemi & Stipek, 2001, s.78)

I det följande beskriver vi specifika lärarhandlingar som syftar till att fördjupa elevernas engagemang i matematiken. De flesta resultaten som gäller de handlingar som syftar till att eleverna motiverar, jämför och utvärderar olika matematiska idéer återfinns i studierna av Cengiz och kollegor (2011) respektive Kazemi och Stipek (2001). De presenterar liknande resultat, men använder olika begrepp i sina analyser av resultaten. Kazemi och Stipek utgår framför allt från de sociomatematiska normer som råder då eleverna engageras i matematiken, medan Cengiz och kollegor utgår från ett annat begrepp som de introducerar, nämligen vidgande episoder (extending episodes). Vidgande episoder avser tillfällen i dialogerna som inbegriper den typ av matematisk reflektion och matematiska resonemang som enligt Cengiz och kollegor kan vidga elevernas matematiska förståelse.

Dessa begrepp är kopplade till varandra såtillvida att man kan säga att ovanstående sociomatematiska normer bäddar för vidgande episoder. Forskarna i de båda studierna identifierar och benämner lärarhandlingar som kan bidra till detta. Det rör sig om lärarhandlingar som syftar till att eleverna

- motiverar, jämför och utvärderar påståenden och lösningsstrategier
- tar ansvar för hela gruppens förståelse
- når enighet genom argumentation
- föreslår andra sätt att tänka och lösa problem
- söker mönster för att kunna generalisera.

Att få eleverna att motivera påståenden och lösningsstrategier

En strategi som lärare i studierna använder för att rikta elevernas uppmärksamhet mot matematiken är att be dem motivera de matematiska idéer som eleverna själva, andra elever eller läraren uttrycker. Exempel på frågor som lärarna ställer är: Vad får dig att säga så?, Hur vet du det? och Varför antar du det? (Cengiz m.fl., 2011).

Cengiz och kollegor (2011) visar till exempel hur en lärare med upprepade varförfrågor får eleverna att koppla samman ett enskilt steg i en lösningsstrategi med det matematiska problemets sammanhang och innebörd. Detta är alltså ett exempel på det som Cengiz och kollegor kallar en vidgande episod i dialogen. Den uppgift samtalet handlar om är följande:

> I en park fanns det 69 duvor. När en hund gick förbi så flög 47 av duvorna iväg.
> Hur många duvor var sedan kvar i parken?
>
> (Cengiz m.fl., 2011, s. 364)

Eleverna löser först uppgiften individuellt och redovisar den sedan på tavlan. Läraren noterar då de olika lösningarna (Cengiz m.fl., 2011). Flera elever löser uppgiften genom att bara använda subtraktion: $69 - 40 = 29$ och $29 - 7 = 22$. Några elever använder dock både subtraktion och addition i sina lösningar: $60 - 40 = 20,\ 9 - 7 = 2,\ 20 + 2 = 22$. Att ett tal som handlar om att dra ifrån också kan innehålla addition kan upplevas motsägelsefullt för elever, och detta vill läraren få eleverna att resonera om. Ett tecken på att detta kan vara svårt för elever är att några av de eleverna i klassen som använder den strategi som förutsätter addition i det sista steget inte adderar utan subtraherar även i det sista steget, och då får det felaktiga svaret arton.

I den efterföljande dialogen i helklass vill läraren få eleverna att motivera varför talen 20 och 2 adderas snarare än subtraheras (Cengiz m.fl., 2011). Läraren fokuserar på vad det innebär att utveckla ett matematiskt argument för en lösningsstrategi. Läraren är inte nöjd med en elevs argument: att lösningsstrategin inte skulle ge rätt svar (Marcus), utan fortsätter att efterfråga argument för att addera 2 och 20 genom att ställa upprepade varförfrågor.

Läraren:	Vem kan berätta för mig **varför** han adderade i stället för att subtrahera?
Marcus:	För att han inte ville få fel svar?
Läraren:	Men han kunde inte veta, han kunde inte veta att det var fel svar.
Elev:	Eftersom det inte verkade rimligt?
Läraren:	**Varför** verkade det inte rimligt? Vad är det som inte är rimligt med det? Pojkar och flickor, jag vill att ni berättar för mig varför han adderade.

Elev:	Eftersom de är de två svaren han fick när han drog ifrån.
Läraren:	Men han hade kunnat säga 20 minus 2 är lika med 18. Det skulle också vara de två svaren och han hade subtraherat. Jag vill att ni tittar på vad Jenny gjorde. Hon subtraherade tiotalen. Eller hur? Och hur många fick hon kvar?
Elev:	20.
Läraren:	Sedan subtraherade hon ettorna. Jenny, **varför** lade du samman dessa?
Jenny:	Eftersom det var de siffror som fanns kvar.

(Cengiz m.fl., 2011, s. 364)

Som framgår i utdraget avslutas dialogen utan att det sista steget i lösningen motiveras till fullo. Cengiz och kollegor menar dock att dialogen ändå fyller sitt syfte, nämligen att få eleverna att resonera matematiskt och på så vis utveckla sin förståelse i ämnet.

I dialogutdraget ovan ger sig inte läraren i första taget. Att läraren framhärdar i sina uppmaningar till eleverna att motivera lösningar och påståenden matematiskt lyfts fram som en viktig aspekt av lärarens agerande även i Kazemi och Stipeks studie (2001). Det ser vi i ett exempel där eleverna har till uppgift att dela fyra kakor mellan sex kråkor. Två elever, Luis och Chris, har delat tre av kakorna i halvor och den resterande kakan i sex delar. Varje kråka får alltså $^1/_2 + {}^1/_6 = {}^4/_6$. I första steget illustrerar eleverna sin lösning med tre kvadrater (kakor) som delas i halvor och en som delas i sjättedelar, och i nästa steg skuggar de delar av två andra kvadrater som visar hur mycket kaka varje kråka får och visar på så vis att $^1/_2$ plus $^1/_6$ är likvärdigt med $^4/_6$ (Kazemi & Stipek, 2001, s. 66).

Dialogen som sedan följer illustrerar den sociomatematiska normen *en förklaring innefattar ett matematiskt argument* (Kazemi & Stipek, 2001). Eleverna är inledningsvis fokuserade på procedurella aspekter, men genom upprepade frågor får läraren till slut eleverna att fokusera på begreppet likvärdighet och hur det relaterar till addition av bråktalen.

Läraren inleder dialogen med att inbjuda övriga elever att kommentera skissen. En elev inleder med att säga att skissen ger en tydlig illustration av det Chris och Luis vill visa. Läraren nöjer sig inte med det svaret, utan ber eleverna specificera vad elevernas skiss visar: Vad ville de att ni skulle se? Samma elev svarar att den visar hur Chris och Luis adderade talen. Läraren är fortfarande inte nöjd och ber eleverna mer specifikt fokusera de delarna som är skuggade och hur de förhåller sig till varandra. En elev använder då det matematiska begreppet likvärdighet för att förklara vad skissen illustrerar.

Läraren:	Vad kan du berätta för mig om deras teckningar som ska visa att $^1/_2$ plus $^1/_6$ är lika med $^4/_6$?
Sam:	De är väldigt tydliga, man kan se precis vad de ville att vi skulle se.

Läraren: **Vad ville de att ni skulle se?**

Sam: Hur de adderade $^{1}/_{2}$ och $^{1}/_{6}$.

Läraren: Och **vad ser du** angående additionen av $^{1}/_{2}$ och $^{1}/_{6}$?

Carrie: De skuggade dem.

Läraren: Okej, de skuggade dem. Vad lägger ni märke till angående delarna som är skuggade? $^{1}/_{2}$ plus $^{1}/_{6}$ och $^{4}/_{6}$? Ser ni något? Nej [väntar.] Jamie, du höll upp handen, **vad ser du**?

Jamie: Den första delen är detsamma som det första steget, den visar $^{1}/_{2}$ och $^{1}/_{6}$. De delade upp $^{1}/_{2}$ i sjättedelar och fick tre sjättedelar. De la ihop $^{4}/_{6}$ och $^{1}/_{2}$. De gjorde ett likvärdigt bråktal. Den första delen är detsamma som det första steget, och den andra delen är detsamma som det andra steget [visar] hur mycket varje kråka fick.

Sam: Alla delarna de gjorde är lika stora och [de visade] stegen de tog för att lägga till den delen.

(Kazemi & Stipek, 2001, s. 66)

Som kontrast till ovanstående ska vi nu ta ett exempel från samma studie som illustrerar en dialog i vilken eleverna inte resonerar matematiskt (Kazemi & Stipek, 2001). Eleverna svarar rätt och de uppmanas att förklara sin lösning. De gör det genom att beskriva de steg de har tagit för att nå fram till svaret. De ger alltså en procedurell beskrivning och berättar om hur de gjorde, men inte varför. Läraren nöjer sig med det och ber inte eleverna motivera varför de gjorde som de gjorde. I stället frågar läraren de övriga eleverna om de håller med eller inte.

Läraren: Okej, skulle du vilja förklara för oss vad ...

Raymond: Var och en får en, och så ger jag dem en halv.

Ms Andrew: Så hur mycket får varje person?

Raymond: En och $^{1}/_{2}$.

Läraren: $^{1}/_{2}$?

Raymond: Nej, en och $^{1}/_{2}$.

Läraren: Så, vad du säger är att alla får en och $^{1}/_{2}$. Verkar det stämma?
[Kör av JAAA från eleverna. Läraren går vidare till en ny uppgift.]

(Kazemi & Stipek, 2001, s. 68–69)

Läraren i ovanstående utdrag ber övriga elever verifiera ett svar på ett övergripande och ytligt sätt genom ett ja/nej-svar, vilket visade sig vara ett typiskt beteende för lärarna i de

klasser där eleverna inte engagerades i matematiken. Den sociomatematiska normen *en förklaring innefattar ett matematiskt argument* kom inte till uttryck i dessa klassrum, vilket innebar att samtalen inte handlade om matematik på ett djupare plan.

Två utsagor från läraren i en av dessa två klasser antyder att ett skäl till att läraren inte ställer krav på eleverna att motivera sina lösningar är att läraren tror att det kan vara för svårt för eleverna. Läraren säger till en elev: Hur vet du det? Kan du bevisa det för mig? Kräver jag för mycket? och till en annan elev: Skulle ni ha kunnat hitta ett sätt att kombinera dessa för att få ett tal? Eller skulle det gjort att ni hade fastnat?

Att få eleverna att jämföra olika lösningsstrategier

En annan lärarhandling som syftar till att engagera eleverna i matematiken är att be dem jämföra olika lösningar. Lärare kan ställa frågan: Vad gjorde de andra som skiljer sig från vad du gjorde? Denna handling får vi exempel på i en dialog, en vidgande episod, som handlar om att fördela spelkort (Kazemi & Stipek, 2001, s. 365):

> Det är tre högar med 52 kort i varje som ska delas mellan sex personer.
> Hur många kort får varje person?

De flesta eleverna löser uppgiften genom att lägga ihop antalet kort i de tre högarna (52 x 3 = 156) och dela med 6 [personer], vilket blir 26. Men en elev, Ryan, använder en annan lösningsstrategi och delar i stället 52 med 2. Läraren ber eleverna jämföra denna lösningsstrategi med den egna.

Forskarna menar att eleverna genom jämförelsen av lösningsstrategier ges möjlighet att se den grundläggande matematiska strukturen (Kazemi & Stipek, 2001). Det vill säga att sex personer som delar på tre högar med kort innebär att en tredjedel av personerna (två personer) kommer att få en tredjedel av korten (en hög med 52 kort). Detta är egentligen detsamma som 3x delat med 6, som är lika med x delat med 2.

Som framgår i utdraget nedan behöver läraren upprepa sin fråga flera gånger och även specificera den innan en elev, Gail, till slut svarar på frågan och beskriver den matematiska struktur som ligger till grund för Ryans lösning.

Läraren:	Varför tror ni att han använder de talen i ställer för att försöka räkna ut hur många kort han måste dela ut totalt? [paus] Mike, vad tror du?
Mike:	Inte säker.
Läraren:	Inte säker. Vilken typ av idé kan Ryan ha haft? Vad tror du Kelly?
Kelly:	Jag är inte säker.
Läraren:	Okej. Min fråga är: måste man räkna ut hur många kort det är i alla kortlekarna tillsammans innan man kan lösa problemet? Tror ni det? Vad får er att tro det?

Elev: För att om du har 52 och du behöver dela det på sex [paus].

Läraren: Okej. Gail?

Gail: Men jag tror att det Ryan gjorde var för att eftersom det finns tre kortlekar så får två personer dela på varje kortlek. Två personer per hög och det är tre högar, det blir sex personer totalt.

Läraren: Hörde ni honom? Vem kan upprepa vad Gail precis sade? De kanske inte hörde dig. Kan du skrika ut det?

Gail: Så, Ryan tog två personer för varje kortlek eftersom det är tre kortlekar, och eftersom det är två personer på varje kortlek, så blir det två gånger tre är lika med sex personer.

Läraren: Hm, jag skulle vilja se några bilder av detta på väggen. Men jag vill ge er andra åtminstone fem minuter till för att jämföra denna metod med den ni använde i er grupp.

(Kazemi & Stipek, 2001, s. 365)

Nästa exempel illustrerar den sociomatematiska norm som säger att *jämförelser mellan strategier ska gälla matematiska skillnader och likheter* (Kazemi & Stipek, 2001). Läraren i studien ber eleverna uppmärksamma vad som är unikt i några elevers lösning jämfört med deras egna lösningar. Eleverna uppmärksammar först procedurella skillnader: att de använde steg. Läraren nöjer sig inte med det svaret utan ber eleverna specificera hur stegen såg ut. Eleverna uppmärksammar då matematiska skillnader mellan strategierna: de delade upp dem i sjättedelar.

Läraren: Vad använde eller gjorde de som skiljde sig från vad ni kanske gjorde?

Jeff: De använde steg.

Läraren: Precis, de delade upp det stegvis. Men det var vissa steg som jag inte har sett någon annan använda i klassrummet än.

Carl: De summerade hur många kakor det fanns totalt.

Läraren: Okej, så de använde …

Jamie: De delade upp dem i sjättedelar, en blev över och då räknade de ut hur de skulle dela upp den rättvist så att alla kråkor fick sin beskärda del.

Läraren: Exakt, och det var väldigt observant av dig att lägga märke till. När jag gick omkring i klassrummet i går lade jag märke till att det bara var det här paret som använde en divisionsalgoritm för att avgöra att det var en hel kaka plus en bit över.

(Kazemi & Stipek, 2001, s. 71)

Vi ska också beskriva en situation från samma studie i vilken läraren missar en möjlighet att engagera eleverna i matematikinnehållet (Kazemi & Stipek, 2001). Elevernas uppgift är att lägga ihop två bråktal: $1\frac{1}{2}$ och $1\frac{1}{8}$. En elev, Ron, föreslår lösningen $2\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{8}$. Läraren är inte nöjd med det svaret utan söker svaret $2\frac{5}{8}$, det vill säga ett svar som innebär att de två bråktalen läggs ihop till ett tal. Rons svar är likvärdigt med lärarens och just likvärdiga bråktal stod i fokus för undervisningen. Läraren tar dock inte chansen att diskutera detta utan konstaterar endast att talen representerar samma summa, men att Rons svar inte är uttryckt lika matematiskt som det svar läraren söker.

Att få eleverna att utvärdera ett påstående eller en lösningsstrategi

I studierna ges exempel på hur lärare engagerar eleverna i matematiska resonemang genom att be dem utvärdera ett påstående eller en lösningsstrategi, med frågor som: Vad tror du?, Håller du med?, Tror du att det är sant? (Cengiz m.fl., 2011). En sådan handling ser vi i en dialog där läraren ber eleverna fundera över om de är övertygade av en elevs lösning av en uppgift.

> Läraren: Jag vill bara att alla reflekterar över sitt eget lärande och jag vill att ni funderar på om ni är övertygade av vad Susan sade? [Läraren beskriver Susans lösning av en uppgift.] Om ni inte är övertygade så är det okej, ni kan bara säga till. Är någon inte övertygad?
>
> (Hunter, 2014, s. 671)

I utforskande samtal är elevers idéer en viktig del av samtalen (Hunter, 2014; Kazemi & Stipek, 2001). Exempelvis kan elevers felsvar användas för att omtolka ett problem, utforska motsägelser och prova alternativa strategier. De kan på så vis skapa ingångar till ytterligare matematisk diskussion som innefattar motivering och verifiering.

Vi ska ta ett exempel på hur en lärare använder några elevers felsvar för att fördjupa klassens engagemang i matematiken (Kazemi & Stipek, 2001). I ett samtal svarar två elever fel, då de påstår att $\frac{6}{8}$ och $1\frac{1}{8}$ är likvärdiga. Eleverna hävdar att båda talen kan vara svaret på $\frac{1}{2}$ plus $\frac{5}{8}$. Här kunde läraren ha nöjt sig med att förklara att $\frac{6}{8}$ och $1\frac{1}{8}$ inte är likvärdiga. I stället uppmuntrar läraren övriga elever att utforska felsvaret. På så vis skapar hon möjlighet för hela klassen att delta i matematiska resonemang. Jessica är en av dem som får till uppgift att motivera sitt svar i sin grupp och hon argumenterar bland annat genom att visa att ett annat sätt att skriva att $1\frac{1}{8}$ är $\frac{9}{8}$. Läraren riktar sig först till hela klassen.

> Läraren: Håller ni med om båda svaren?
>
> Elever: Nej.
>
> Läraren: Har ni något skäl till att ni inte håller med? Förklara inte för mig, men har ni något skäl? Räck upp handen om ni har ett skäl.

Sex personer räcker upp handen. Läraren riktar sig till dem.

Läraren: Ni kommer få ansvar för att förklara för er grupp varför ni inte håller med.

Läraren delar in klassen i sex grupper och fördelar de sex eleverna i grupper. I en av grupperna förklarar Jessica varför hon inte håller med.

Jessica: Jag tror inte att det är $^{6}/_{8}$ för en till åttondel skulle bli, typ … Det är $^{4}/_{8}$ i en halv. Så det skulle inte gå. [Hon fortsätter förklara.] Det kan inte vara $^{6}/_{8}$ eftersom … de har $^{5}/_{8}$ där uppe, kolla, och här finns det en, och bara en mer.

Carlos: En till halva blir en hel.

Jessica: En till halva blir en hel. Det skulle inte bli så. Jag håller med om det andra svaret.

James: $^{6}/_{8}$ är rätt.

Jessica: $^{6}/_{8}$ är *inte* rätt. Kolla här, där är $^{5}/_{8}$. Så svaret på den första frågan är $^{9}/_{8}$ i stället för $^{6}/_{8}$. [Paus.] Vänta, få se … fem … ja. Det borde bara bli $^{9}/_{8}$. [Läraren kommer fram till gruppen.]

Läraren: Vad kom ni fram till i er grupp?

Jessica: Vi kom fram till att $^{6}/_{8}$ inte var rätt svar eftersom bara $^{1}/_{8}$ kunde ge svaret $^{6}/_{8}$ i stället för $^{1}/_{2}$. $^{1}/_{2}$ och en $^{1}/_{2}$ är en hel, så vi såg på bilden att $^{4}/_{8}$ är lika med en halv. Så $^{4}/_{8}$ och $^{5}/_{8}$ är $^{9}/_{8}$. [Läraren går iväg.]

(Kazemi & Stipek, 2001, s. 73)

I nästa utdrag får vi exempel på det motsatta, det vill säga att läraren inte tar chansen att tillsammans med eleverna utforska deras felsvar (Kazemi & Stipek, 2001). Eleverna Antonia och Rachel har lagt ihop talen $^{1}/_{8} + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{4}$ och kommit fram till svaret $^{3}/_{16}$. De har alltså lagt ihop nämnare och täljare var för sig. Här hade läraren kunnat använda elevernas felsvar som en möjlighet att jämföra storleken på de olika talen och be eleverna fundera över vad talen står för. Men istället ger läraren eleverna ledtråden att talen i nämnarna [fyra och åtta] inte går att lägga ihop, och eleverna kommer då på hur de ska göra. Både lärarens och elevernas fokus ligger alltså på själva proceduren, uträkningen, och inte på matematiken på ett djupare plan.

Lärare: Okej, det är en bra gissning. Men du kan inte addera den här $^{1}/_{4}$ med den här $^{1}/_{8}$ på det sättet. Du kan inte bara lägga ihop den här fyran och den här åttan till tolv.

Antonia: Vi kanske skulle kunna addera …

Rachel: Åhh, vi skulle kunna dela fjärdedelarna i åttondelar.

Lärare: Lyssna nu, lyssna. Hon [hänvisar till Rachel] har en bra idé. [Går vidare till nästa grupp.]

(Kazemi & Stipek, 2001, s. 75)

Läraren kan också stödja elevers engagemang i matematiken genom att överlåta till eleverna att verifiera lösningen matematiskt, istället för att vara den auktoritet som avgör om en lösning är rätt eller fel (Hufferd-Ackles m.fl., 2004; McCrone, 2005). McCrone (2005) talar om detta som en sociomatematisk norm och beskriver hur den successivt etableras i klassen under de sex månader som studien pågår. Etableringen sker genom en förhandling mellan lärare och elever. En sådan förhandling exemplifieras i nedanstående dialogutdrag. Samtalet handlar om två tal som ställts upp för att subtraheras, och en elev har räknat ut det genom att låna ett tiotal. Dialogen är från ett tillfälle några månader in i studien.

Bethany: Hm, han använder talet 1 två gånger … för att få 12 (12 tiondelar) och …

Läraren: Ser ni var ettorna är? Någon?

Bethany: Och när han strök sjuan fick han en sexa, så han använde den en gång. Så om vi ska räkna sexan borde vi räkna ettan. [till läraren] Men jag är inte säker på om man räknar den?

Nikki: Joo, han använde alla talen men jag tror inte att ettan verkligen räknas. Det är inte riktigt en etta. Det är mer som en tia.

Läraren: OK ...

Bethany: Det är på något sätt upp till läraren … om du vill acceptera sexan och ettan, eller bara sexan, eller ingen alls.

Läraren: **Så läraren ska fatta det beslutet?**

Bethany: Ja.

Läraren: Fattar jag det beslutet när jag … du skriver upp det [på tavlan] och jag säger: Ja, jag accepterar det eller Nej, jag accepterar det inte? Eller händer det någon annanstans?

Bethany: Jag tror att det [att fatta beslut] händer någon annanstans … Det är på något sätt lärarnas beslut om de vill räkna problemet.

(McCrone, 2005, s. 123)

Ett annat exempel från samma studie visar hur läraren låter eleverna ta ansvar för att verifiera två elevers skilda lösningar (McCrone, 2005, s. 131). Eleverna heter Karen och Amir. Dialogen inleds med att Karen frågar läraren om Amirs lösningsmetod är giltig eftersom han inte skrev ut den multiplikation som ingick i lösningen. Läraren

ger inte svaret utan bekräftar endast Karens undran: Så du känner dig obekväm med att han inte visade multiplikationen? Andra elever kommer in i samtalet och säger att både Karen och Amirs lösningar är giltiga. En av dem säger: Jag tror att Amirs metod är okej. Och att Karen gör som Nikki sa att man kunde göra. Läraren avslutar lektionen genom att be alla elever skriva ner sina uppfattningar om huruvida Karens eller Amirs strategi är giltig, eller om de uppfattar att båda strategierna är giltiga. Forskarna menar att läraren på så vis ger eleverna ansvar för matematiken i uppgiften.

Att få alla elever att ta ansvar för hela gruppens förståelse och försöka nå enighet genom matematisk argumentation

En annan strategi för att få elevers resonemang att röra matematiken är att läraren betonar det individuella ansvaret i gruppdiskussionerna. Med individuellt ansvar avses i detta sammanhang att varje elev måste ta eget ansvar för att förstå de matematiska resonemangen som förs i gruppen (Kazemi & Stipek, 2001), men också att varje elev måste ta ansvar för att göra sig förstådd och för att försöka få de andra att förstå (Hunter, 2014). Det räcker alltså inte med att någon eller några av eleverna förstår. En lärare uttrycker det: Så ni måste försäkra er om att varje person förstår varje del i den process ni gått igenom.

Det tycks inte alltid räcka med att läraren bara ger generella anvisningar om att eleverna ska samarbeta, såsom: Arbeta tillsammans med en kamrat! eller Kom ihåg att arbeta tillsammans! Detta framgår bland annat i studien av Kazemi och Stipek (2001). De konstaterar att i vissa klasser fördelas arbetsbördan ojämnt mellan eleverna, så till vida att det bara är en eller två elever i gruppen som pratar medan de övriga eleverna tar en mer perifer roll i gruppdiskussionerna. Detta trots lärarens uppmaningar om att samarbeta. I dessa klasser kommer alltså inte ett individuellt ansvarstagande för hela gruppen till uttryck.

Elevernas engagemang i matematiken stöds också av lärarens förväntningar på dem att försöka nå enighet genom matematisk argumentation (Kazemi & Stipek, 2001). I följande exempel diskuterar läraren begreppet konsensus, enighet, med eleverna, och vad eleverna kan göra om det visar sig att de är oeniga. En elev har strax innan vi kommer in i dialogen frågat vad begreppet betyder.

Läraren:	Nja, konsensus är det samma som att komma överens. De uppnår antingen konsensus eller enas om en lösning. Men vad händer om de inte kan uppnå konsensus eller enas om en lösning? Vad tror ni att de gör?
Ricky:	Försöker igen?
Läraren:	De får försöka igen. Och hur skulle de kunna försöka igen och förklara en lösning för varandra. Julie?
Julie:	Rita illustrationer av våra svar.
Läraren:	Okej, ni skulle kunna använda illustrationer för att visa vad

ni tror att lösningen på problemet är.

Mark: Ni skulle båda två liksom kunna skriva ner era svar och jämföra, och om ni båda har samma svar så kan ni anta att det är alltså det (rätta) svaret.

(Kazemi & Stipek, 2001, s. 76–77)

Att ta individuellt ansvar och försöka nå enighet genom matematisk argumentation är en av de sociomatematiska normer Kazemi och Stipek fokuserar på. Samma studie ger exempel på hur de elever resonerar som tycks ha införlivat denna norm. Det visar sig på så vis att de är uppmärksamma på varandras idéer. Mark, exempelvis, svarar på alla Keishas förslag och bedömer om de behöver skrivas ner. Eleverna diskuterar en uppgift som handlar om att fördela tre kakor på sex kråkor.

Keisha: Så här förklarade jag det. [Läser.] Vi gjorde så att vi tog tre kakor och delade dem i halvor eftersom tre plus tre blir sex. Och det är sex kråkor.

Mark: Det här är vad jag har skrivit ner hittills. [Läser.] Vi visste att det fanns tre kakor till och delade var och en i halvor. En kaka hade två halvor, en annan kaka hade två halvor, och (ännu) en två halvor.

Keisha: Skriv bara Och alla tre hade två halvor. Och alla …

Mark: [Börjar skriva.] Och alla tre…, jag behöver inte skriva det här.

Keisha: Okej, och varje kråka fick $^1/_2$ och … skriv bara 3 + 3 = 6 så att varje kråka fick $^1/_2$ av kakan.

Mark: Ja, men de här är halvor. [Räknar halvorna av varje kaka.] 2,2.

Keisha: Ja, jag vet. 1,2,3. [Räknar kakor.] Dela dem på hälften, 1, 2, 3, 4, 5, 6. [Räknar halvor.] Det var sex kråkor. Varje kråka fick $^1/_2$.

Mark: [Skriver: Varje kråka fick en halva.]

(Kazemi & Stipek, 2001, s. 77)

Att få eleverna att föreslå andra sätt att tänka och lösa problem

I en av studierna ser vi hur en lärare engagerar eleverna i matematiken genom att be dem föreslå olika alternativa sätt att lösa ett problem (Elbers, 2003). Elevernas olika lösningsförslag blir en del av undervisningen och eleverna använder dem i sina förklaringar.

I studien följer vi samtalen mellan en lärare och 28 elever i en klass under en lektion. Läraren uppmanar eleverna att föreslå olika sätt att lösa ett matematiskt problem. Undervisningen växlar mellan grupparbete och helklassdiskussioner. I helklassdiskussionerna får eleverna ta del av varandras lösningsstrategier och det framgår att eleverna anammar

varandras strategier. På så vis utvecklar de sin förståelse av matematiken. Eleverna arbetar med följande uppgift:

> En farmaceut förbereder medicin till fröken Jansen enligt doktor Sterks ordinering. Fröken Jansen ska ha 40 tabletter enligt följande:
>
> 6 tabletter om dagen i 2 dagar
> 5 tabletter om dagen i 2 dagar
> 4 tabletter om dagen i 2 dagar
> 3 tabletter om dagen i 2 dagar
> 2 tabletter om dagen i 2 dagar
> 1 tablett om dagen i 2 dagar
>
> Detta blir dock 42 tabletter sammantaget och farmaceuten tänker att doktor Sterk har gjort ett misstag. Har han det?
>
> (Elbers, 2003, s. 83)

Fyra olika lösningsstrategier föreslås. För att underlätta läsningen har lösningsstrategierna kursiverats i följande text.

I den första helklassdiskussionen föreslår en elev (elev 1) att man *tar antalet tabletter per dag gånger två, och sedan lägger ihop summorna*, alltså 6 gånger 2, 5 gånger 2 osv. och sedan 12 + 10 + 8 osv. Läraren kommenterar att det är rätt, men att det är en omständlig väg att gå. Läraren frågar om någon elev har en mer praktisk lösning. En annan elev (elev 2) föreslår då ett enklare sätt att lägga ihop summorna av de multiplicerade talen. Eleven gör *kombinationer av tio och tjugo:* 12 + 8 = 20, 6 + 4 = 10. Då blir det 20 + 10 + 2 = 22.

Efter helklassdiskussionen skriver eleverna ner sina individuella lösningar på papper. Alla elever utom två löser då uppgiften på samma sätt som elev 1. De två övriga eleverna använder en ny strategi: *de lägger först ihop antalet tabletter och multiplicerar summan med två*, alltså först 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1, och sedan den summan gånger 2. En elev som löst uppgiften på det sistnämnda sättet får redovisa sin lösning för de andra eleverna i den efterföljande helklassdiskussionen. Läraren berömmer eleven för lösningen, men lägger till att den kan förbättras ytterligare.

Läraren introducerar sedan en andra version av problemet: eleverna ska börja med 8 tabletter i stället för 6. Eleverna skriver först ner sina lösningar individuellt på papper. I elevernas svar visar det sig att nitton elever influerats av den föregående diskussionen och använder strategin att först addera alla tabletter och sedan multiplicera den summan med 2, alltså så som elev 2 gjorde i den första helklassdiskussionen. Vid adderingen av talen använder flera elever strategin att göra kombinationer av 10, exempelvis 8 + 2 = 10, 7 + 3 = 10. Två elever provar något nytt och *använder svaret på den föregående uppgiften som en del i uträkningen*, det vill säga de tar 42 (summan i den första uppgiften) och lägger till 2 x 7 + 2 x 8 (de ytterligare tabletterna). I den efterföljande helklassdiskussionen ser läraren till att den sistnämnda lösningen tas upp.

Läraren introducerar sedan ytterligare en variant av problemet: eleverna ska börja

med tio tabletter i stället för åtta. Sexton elever använder då svaret på den föregående uppgiften som en del i uträkningen. De använder alltså den strategi som en elev presenterat i den föregående helklassdiskussionen och som bara två elever dittills har använt.

Att få eleverna att söka mönster för att kunna generalisera

Slutligen ska vi ge exempel på hur lärare engagerar elever i matematiken genom att be eleverna försöka finna ett mönster i lösningen av matematiska problem, och på vis finna en matematisk regel eller formel.

Vi ska återknyta till klassrumsdialogen om fröken Jansens tabletter i det ovanstående stycket. I slutet av den lektionen får eleverna en ny utmaning (Elbers, 2003, s. 87). Förutom att receptet nu startar med tio tabletter, uppmanas eleverna att fundera över om de kan komma fram till svaret utan att summera. Läraren ger eleverna en ledtråd för att finna ett mönster, en formel.

Läraren:	Jag ska ge er en ledtråd: se här, jämför de tre siffrorna. När jag börjar med 6 … när jag börjar med 8 … när jag börjar med 12 … När ni jämför så kanske ni kommer till en slutsats, en upptäckt.

Eleverna arbetar länge med uppgiften, gruppvis. I gemensamma resonemang jämför och diskuterar de olika lösningar. Läraren går runt och pratar med de olika grupperna. Diskussionen i en av grupperna resulterar i att några elever finner en lösning på lärarens utmaning. Den presenteras i en helklassdiskussion. Lösningen är att multiplicera antalet tabletter med ett tal större än det, exempelvis 6 [tabletter] x 7, 8 [tabletter] x 9 osv.

Ett annat exempel på en lärares uppmaning till eleverna att försöka finna en matematisk regel ges i följande utdrag från Drageset (2014). Eleverna har strax innan funnit flera bråktal som är likvärdiga med en halv. Läraren efterfrågar då en regel för att identifiera sådana bråktal. Då eleverna har gjort det ger läraren ett numeriskt exempel för att se om eleverna kan tillämpa regeln på det.

Läraren:	Jag vet att ni pratade om en regel. Kan ni hitta en regel där det är lätt att se sådana likvärdiga bråk: hur kan vi göra en sådan?
Elev 1:	Nämnaren är dubbelt så stor som täljaren.
Läraren:	Ja. Nämnaren, det vill säga den nedre, är dubbelt så stor som täljaren. [Pekar på båda.] Stämmer. Bra.
Läraren:	Men om jag hittar på ett annat bråk som till exempel är 34 [Skriver 34.], kan vi då se att … eh … att täljaren är 34, kan vi då göra ett bråk som är detsamma som en halv?
Elev 2:	68.
Teacher:	Bravo. 68. [Skriver det nedanför 34 med en linje emellan för att skapa ett bråktal.] Elev 2, hur kom du fram till den lösningen?

(Drageset, 2014, s. 295)

Ibland behövs mer stöd från läraren

I de föregående avsnitten har vi redogjort för lärarhandlingar som syftar till att skapa förutsättningar för elevers deltagande i så kallade utforskande samtal. Det ska dock sägas att trots att forskningen betonar vikten av elevers utforskande av egna och andras matematiska idéer, så innebär inte det att alla klassrumsdialoger alltid behöver, bör eller kan vara utforskande. Webb och kollegor (2014) konstaterar till exempel att utforskande av elevers olika idéer, speciellt om de involverar nya idéer, ibland kan vara kontraproduktivt och förvirrande för de elever som har svårt att förstå den initiala förklaringen (Webb m.fl., 2014).

Ibland behövs helt enkelt mer stöd från läraren, på så vis att läraren *leder* samtalen i högre grad för att behålla elevernas koncentration och för att eleverna inte ska tappa tråden i resonemangen (Drageset, 2014). Läraren kan då själv behöva förklara eller erbjuda sina tolkningar av det som samtalen handlar om (Cengiz m.fl., 2011; Drageset, 2014; Henning m.fl., 2012; Hufferd-Ackles m.fl., 2004) eller så kan läraren *styra* samtalen, utan att det nödvändigtvis sker på bekostnad av elevernas aktiva deltagande (Elbers & Streefland, 2000; Hunter, 2014).

Lärarens stöd kan exempelvis behövas då elever inte själva ser sambanden mellan tidigare och ny kunskap, då de inte förmår resonera matematiskt, eller då de inte tydligt kan uttrycka sina idéer (Cengiz m.fl., 2011). Cengiz och kollegor (2011) formulerar sig på följande sätt om vikten av lärarens stödjande handlingar, handlingar som de menar innebär mer av teacher telling:

> Supporting actions could be viewed as less desirable because they involve more teacher telling. However, the data indicate that supporting actions play a significant role in extending episodes (Cengiz m.fl., 2011, s. 366).

Då eleverna möter nytt matematiskt innehåll

Ett tillfälle då läraren kan behöva vara mer stödjande i samtalen är då ny kunskap introduceras i undervisningen. Det ser vi bland annat i en studie av Hufferd-Ackles och kollegor (2004). I den beskrivs att elevernas deltagande tillfälligt ändrar karaktär då nya begrepp introduceras i undervisningen. Eleverna är då inte lika aktiva som de var innan. De uttrycker inte sina idéer lika gärna och de ställer inte frågor i samma utsträckning som tidigare.

Ett exempel på ett sådant tillfälle från samma studie är då undervisningen övergår från att handla om multiplikation och division till att fokusera på flersiffrig addition och subtraktion (Hufferd-Ackles m.fl., 2004). Eleverna blir då under en period mindre engagerade i resonemangen och det tar sedan flera dagar för eleverna att återta sina aktiva roller. Under dessa dagar intar läraren en mer central roll genom att ta större ansvar för samtalen. Läraren ger mer stöd i form av förklaringar av innehållet, och konstaterar i en intervju att det stödet hjälper eleverna att hänga med i undervisningen:

> Once I go over it and give them a sample of how I would explain, they seem to catch on better (Hufferd-Ackles m.fl., 2004, s. 111).

Hufferd-Ackles och kollegor drar slutsatsen att elever behöver stöd av läraren för att lära sig nya ord och begrepp, för att sedan återigen kunna inta en aktiv roll i dialogen:

> (…) the mathematics must be accessible to students or familiar enough for them to be able to participate in meaningful discourse. As teachers move through the year, they will need to fall back to level 1 or 2 to assist students in building vocabulary and concepts in new content areas (Hufferd-Ackles m.fl., 2004, s. 111). [Elevernas förändrade deltagande beskrivs i nivåer, se schematisk beskrivning s. 14–16.]

Även studien av Henning och kollegor (2012) visar att elevers deltagande i samtalen förändras när ny kunskap introduceras. I den studien beskriver forskarna hur karaktären på diskussionerna skiljer sig under olika faser av ett undervisningsavsnitt, allteftersom eleverna blir mer bekanta med innehållet. De konstaterar också att elevernas deltagande, som mäts i antalet ord som de yttrar, varierar över faserna. De talar om den inledande *inramande* diskussionen, den därpå följande *begreppsliga* diskussionen då ny kunskap introduceras, och den avslutande *tillämpande* diskussionen.

Den inramande diskussionen sker tidigt i undervisningen av ett avsnitt. Diskussionen har då som syfte att få elever att delta så mycket som möjligt, aktualisera deras tidigare kunskap inom området, och skapa ett meningsfullt sammanhang för den undervisning som ska följa. Uppgifterna kräver inte mycket matematisk kunskap av eleverna. Eleverna är mycket aktiva. Läraren uppmuntrar eleverna att delta, bekräftar deras idéer och styr samtalet i låg utsträckning.

Därefter följer *den begreppsliga diskussionen*. Här är syftet att få eleverna att delta i samtalen, samtidigt som ny kunskap introduceras. Uppgifterna är längre och mer komplexa än vid de inramande diskussionerna. Elevers deltagande i samtalen är lägre än i de två övriga diskussionstyperna. Läraren ger mer stöd, genom att exempelvis utveckla, omformulera och sammanfatta elevernas idéer.

Den tillämpande diskussionen sker sist i undervisningsavsnittet. Syftet är att eleverna ska utveckla matematisk förståelse genom att tillämpa nyligen tillägnade begrepp i verkliga problemsituationer. Uppgifterna som ges i den här fasen är de längsta och mest komplexa. Elevernas deltagande är som högst och lärarens stöd som lägst.

Då elever upplever det matematiska innehållet som särskilt svårt

Nu är det emellertid inte så enkelt att det bara är när ny kunskap introduceras som läraren behöver vara mer stödjande. Ayalon och kollegor (2016) visar att elevers möjligheter att delta i matematiska resonemang är resultatet av ett samspel mellan karaktären på innehållet, klassen och lärarens undervisning. De visar att läraren till exempel behöver beakta att visst matematiskt innehåll kan upplevas svårare att förstå än annat, och att elevernas förmågor och förkunskaper kan ha betydelse för deras deltagande.

Forskarna jämför elevernas deltagande i samtal i fyra olika klassrum i vilka två olika

matematiska innehåll behandlas: algebraiska uttryck respektive algebraiska uttrycks likvärdighet (Ayalon & Even, 2016). Två lärare, Sarah och Rebecca, undervisar i två klasser vardera. Lärarna har varsin klass som tidigare visat begränsat elevengagemang. I det ena fallet handlar det om disciplinära problem och i det andra om svårigheter att skapa förståelse av innehållet. Lärarnas undervisning skiljer sig också. Den ena läraren, Sarah, dominerar samtalen genom att i hög grad leda resonemangen, som att själv motivera och argumentera för de matematiska påståenden som tas upp. Den andra läraren, Rebecca, lämnar däremot över mycket ansvar till eleverna att motivera och utvärdera påståenden. Hon ger begränsat stöd i form av exemplifieringar av hur eleverna kan argumentera matematiskt.

Studien visar att elevernas deltagande i Sarahs klasser ser likadant ut oberoende av vilket innehåll som behandlas (Ayalon & Even, 2016). Deras deltagande är dock begränsat jämfört med elevdeltagandet i Rebeccas klass, eftersom Sarah dominerar samtalen och är den som motiverar och argumenterar för påståenden. I Rebeccas klass däremot är eleverna i båda klasserna aktiva i resonemangen då undervisningen behandlar algebraiska uttryck, men inte då den handlar om algebraiska uttrycks likvärdighet. I det sistnämnda fallet är det bara i den ena klassen som eleverna svarar på Rebeccas uppmaning att motivera sina påståenden. I den andra klassen (den med elever som tidigare har haft svårt att förstå matematikinnehållet) får läraren ingen respons av eleverna på sin uppmaning till dem att motivera påståenden.

De slutsatser som forskarna drar är att för den klass som tidigare har haft problem med att tillgodogöra sig det matematiska innehållet blev det svårt för eleverna att följa och föra de matematiska resonemangen, då Rebecca endast gav ett begränsat stöd även då hon undervisade det svårare innehållet (Ayalon & Even, 2016). Forskarna konstaterar i studien att läraren skulle ha behövt vara mer stödjande i klassrumsdialogerna i detta fall.

Läraren styr men eleverna deltar fortfarande aktivt

Vi har tidigare konstaterat att lärarens roll i utforskande samtal skiljer sig från den i samtal enligt IRE-modellen (Henning m.fl., 2012). En viktig skillnad är att läraren ger utrymme för elevernas matematiska idéer. Hur kan då läraren vid behov stödja eleverna genom att styra samtalen, utan att det sker på bekostnad av elevernas aktiva deltagande? Det går vi in på nu, då vi visar hur lärare i de utvalda studierna leder samtalen på ett sätt som gör att deras idéer fortfarande tas tillvara och blir en del av diskussionen. Det sker bland annat genom att läraren omformulerar det eleverna säger, eller antyder möjliga vägar att gå för att finna en lösning.

Omformulera det eleverna säger

Läraren kan genom att upprepa det eleverna säger, men inte ordagrant, förtydliga en elevs utsaga eller göra så att den blir mer matematiskt korrekt. Det sistnämnda innebär till exempel att läraren byter ut vardaglig terminologi mot mer matematisk och tar bort eventuella fel eller felaktig begreppsanvändning (Elbers & Streefland, 2000). På så vis

behålls anknytningen till elevernas idéer men de uttrycks mer matematiskt korrekt.

Vi får exempel på detta i en studie där eleverna i helklass diskuterar hur man kan mäta höjden på ett torn genom att använda tornets skugga (Elbers & Streefland, 2000). Eleverna får ge förslag på hur man kan gå tillväga. Saskia föreslår att man använder sin egen skugga i uträkningen, och läraren omformulerar, ändrar ett felaktigt påstående och förtydligar på så vis det Saskia just sagt.

> Saskia: Man kan mäta sin egen skugga. Den kanske är hälften så lång som du. Sen mäter du tornets skugga och delar det med två. Sen vet du hur högt tornet är, tror jag.
>
> Läraren: [Riktar sig till hela klassen.] Saskia säger att man kan mäta sin egen skugga eller få den mätt. Jag vet hur lång jag är, med min längd får jag en så här lång skugga. Om vi antar att min skugga är två gånger så lång som jag så gäller det samma för tornet. På så sätt kan jag beräkna tornets höjd.
>
> (Elbers & Streefland, 2000, s. 485)

Ett annat exempel på omformulering är då en lärare förtydligar det eleven uttrycker. Det är från en dialog i vilken en elev, Heath, ger en korrekt representation av ett problem, men en felaktig förklaring (Hunter, 2014). Uppgiften är att räkna ut hur mycket man måste spara om man vill köpa en t-shirt för 17 dollar och redan har 9 dollar på banken. Heaths formel kan korrekt förstås som att Z står för kostnaden för t-shirten, alltså 17 dollar. Om man tar den kostnaden minus 9 dollar, så får man fram hur mycket man behöver spara. Heath säger dock att Z står för hur mycket man måste spara och att X står för kostnaden för t-shirten.

> Heath: [Skriver Z – 9 = X.] Den första visar hur mycket vi behövde spara, den följande hur mycket vi har på banken, det är nian, och den sista är kostnaden för t-shirten.

Läraren ger eleverna lite tid att tänka över det Heath har förklarat. Hon omformulerar sedan Heaths förklaring för att ge Heath en möjlighet att validera den eller ge en ny förklaring.

> Läraren: Jag ska bara fråga Heath på nytt nu när ni har haft lite tid att tänka över det … Du sade att summan som ni behöver spara ihop till minus nio är lika med vad t-shirten kostar. Kan du tänka över det lite?
>
> Heath: Jag menade egentligen att det [Pekar på Z.] är vad t-shirten kostar, sedan tar vi det minus nio för att se hur mycket vi behöver.
>
> (Hunter, 2014, s. 672)

Antyda en möjlig lösning

En annan strategi som lärare använder för att styra utan att ta över samtalet, är att antyda en möjlig väg att gå för att lösa uppgiften. Detta kan exempelvis ske genom att uppmärksamma eleverna på vissa elevers förklaringar, de som är på rätt spår, och klargöra att de är intressanta att diskutera och undersöka vidare (Elbers & Streefland, 2000). Vi ska exemplifiera detta med utdrag ur en dialog som handlar om hur man kan mäta höjden på en byggnad med hjälp av byggnadens skugga. Strax innan vi kommer in i samtalet har eleverna i helklass diskuterat hur skuggans längd förhåller sig till tornets höjd. Utdraget visar hur läraren styr samtalet genom att uppmärksamma övriga elever på vad Peter och Saskia just sagt.

Peter:	Hur vet du det? [Kommenterar ett uttalande om att skuggan är längre än tornet.]
Saskia:	Det beror på hur solen står.
Läraren:	**Peter frågar: Hur vet du det? Saskia svarar: Det beror på hur solen står. Kan du förklara det Saskia?**
Saskia:	När solen står (rakt) ovanför så tror jag att skuggan är kortare.
Läraren:	Så, när solen står högt är skuggan kortare. Och när solen går ner? [Samtalet går vidare.]

(Elbers & Streefland, 2000, s. 484)

En annan studie visar hur läraren knyter an till elevernas resonemang genom att uppmärksamma dem på hur de bingobrickor de använder för att symbolisera pengar och en bägare som får symbolisera antal veckor, kan förstås som variabler i en matematisk formel. En formel som kan användas för att räkna ut hur mycket en person som sparar två dollar i veckan har sparat efter ett visst antal (x antal) veckor (Radford, 2011).

Erbjuda sin tolkning eller summera tidigare påståenden

Läraren kan också stödja eleverna i de gemensamma resonemangen genom att delge eleverna sin tolkning av det samtalet handlar om. Det exemplifieras i följande utsaga där läraren beskriver det problem några elever försöker lösa för övriga elever: De kämpar med idén att man kanske inte behöver räkna ut hur många kort det är i alla tre kortlekarna sammanlagt (Cengiz m.fl., 2011, s. 364). Läraren kan också stödja elevers deltagande i utforskande samtal genom att på olika sätt summera de föregående påståendena (Henning m.fl., 2012).

3.3 Slutsatser

Översikten avser att ge en nyanserad och rik bild av vad forskningen sammantaget säger om klassrumsdialoger i matematik. Vår ambition har varit att ge svar på vad som

kännetecknar klassrumsdialoger som engagerar elever i matematiska resonemang och som tar tillvara elevers olikheter, och vad som kännetecknar lärarens ledning av sådana dialoger.

Vi kan inledningsvis konstatera att forskningen inte ger några enkla svar på vilken eller vilka lärarhandlingar som i allmänhet leder till att elever engagerar sig i gemensamma matematiska resonemang. En specifik handling verkar kunna vara effektiv i ett sammanhang men inte i ett annat. Forskningen visar att elevers deltagande snarast är resultatet av ett samspel mellan karaktären på innehållet, individerna i klassen och undervisningen.

Även om forskningen inte ger några enkla svar, ger den användbar kunskap om vilka handlingar som har potential att engagera eleverna i gemensamma matematiska resonemang, och kunskap om på vilket sätt och varför dessa handlingar kan tänkas stödja deras deltagande. Den bidrar också med kunskap som kan ge ökad förståelse av den egna undervisningspraktiken genom att sätta ord på det som sker i klassrummet, och identifiera mönster och strukturer som kan kännas igen. Ett exempel är de tre typer av klassrumsdialog som definieras i forskningen: disputerande, kumulativa och utforskande samtal.

Forskningen visar också att det läraren gör kan ha stor betydelse för hur klassrumsdialogerna gestaltar sig. Speciellt talande är de studier som visar hur karaktären på elevernas deltagande förändras parallellt med lärarens sätt att leda samtalen. Genom sitt handlande har man alltså som lärare stor möjlighet att förändra samtalen så att elever blir mer aktiva deltagare i gemensamma resonemang. Men elever är olika – de skiljer sig vad gäller förmågor, erfarenheter och personlighet – så, som redan konstaterats, några enkla anvisningar om lärarhandlingar som fungerar oavsett sammanhang finns inte. Men med lyhördhet inför elevernas respons på de egna handlingarna kan man som lärare både möta och ta tillvara elevers olikheter i undervisningen, vilket vi nu ska diskutera.

Deltagande i utforskande samtal innebär att uttrycka sina egna idéer offentligt och att ifrågasätta, om än respektfullt, andra elevers idéer. Den här typen av samtal ställer alltså andra krav på elevernas deltagande än den undervisning i vilken läraren dominerar och elevernas roll mest består i att svara på lärarens frågor. Att delta i utforskande samtal kan kännas mer eller mindre utmanande för olika elever och dessa olikheter behöver man möta som lärare. Kunskapen om sociala normers betydelse för elevers deltagande ger vägledning för hur elevernas engagemang i utforskande samtal kan stödjas.

Studierna visar hur lärare genom olika handlingar – de exemplifierar, förstärker, omformulerar – successivt etablerar gynnsamma sociala normer i klassrummet genom att synliggöra vad som är förväntade beteenden i dialogerna. Sådana uttalade förväntningar på beteenden ger alla elever vägledning för hur man resonerar gemensamt. Och kanske ännu viktigare: uttalade förväntningar på beteenden kan få med de elever som känner motstånd mot att delta i gemensamma resonemang. De kan legitimera beteenden som elever kan känna sig obekväma med, som att be andra elever att motivera sina påståenden, och stödja elever som tycker att det är obehagligt att dela med sig av tankar och idéer som de känner sig osäkra på.

Elever har skilda erfarenheter och de gör olika tolkningar av innehållet i undervisningen. Forskningen visar hur lärare tar tillvara elevers olika matematiska idéer och använder dem som en resurs för att fördjupa elevernas engagemang i matematiken. Med öppna frågor lockar läraren eleverna att uttrycka sina skilda sätt att förstå ett problem, varav inget behöver vara fel. Det kan till exempel handla om olika sätt att lösa ett problem, som alla ger samma korrekta svar. Genom lärares handlingar – som att be eleverna motivera sina påståenden och lösningsstrategier, jämföra olika lösningar eller utvärdera olika påståenden och lösningsstrategier – kan eleverna stimuleras att utforska matematiken i dessa idéer. I ett utforskande samtalsklimat kan även elevers felsvar användas för att fördjupa elevernas engagemang i matematiken. I ett sådant klimat ses elevers felsvar inte bara som acceptabla utan också som användbara: de ger möjlighet att omtolka ett problem, utforska motsägelser och prova alternativa strategier.

I utforskande samtal får elevernas matematiska idéer stort utrymme. Men detta innebär inte att läraren lämnar över allt ansvar för att utforska matematiken till eleverna. Även då samtalen har förändrats så att elever deltar aktivt med frågor och förklaringar behöver läraren finnas där för att underlätta resonemangen och ge stöd vid behov. Dessutom behöver läraren ta större ansvar för att leda samtalen vid vissa tillfällen, till exempel då ny kunskap introduceras eller då eleverna upplever att ett visst innehåll är extra svårt att förstå. Alla matematiska samtal behöver heller inte vara utforskande; det är inte alltid läge. Ibland kan man som lärare behöva leda samtalet i högre utsträckning för att behålla elevers koncentration, eller för att de inte ska tappa tråden.

Avslutningsvis vill vi betona att förändringar av matematiska samtal i klassrummen tar tid. Är eleverna vana att klassrumsdialogerna i matematik vanligen förs enligt ett IRE-mönster kräver förändringen både att eleverna lär sig nya sätt att delta i samtalen och känner sig trygga med de nya förväntningarna på deltagande. De studier som beskriver förändringar i samtalen pågår under flera månader.

Tabell 2. Information om de arton studierna som ingår i översikten.

Sammanställning av studierna			
Författare, år, land och titel	Årskurs	Matematikinnehåll	Resultat
Ayalon (2016), Israel **Factors shaping students' opportunities to engage in argumentative activity**	Åk 7	Algebra: Generaliserbara egenskaper hos algebraiska uttryck och bevis av uttrycks likvärdighet. Ex. Är m-1 likvärdigt med 1-m?	Elevers möjligheter att delta i gemensamma matematiska resonemang formas av samspelet mellan karaktären på matematikinnehållet, karaktären på lärarens undervisning och karaktären på klassen.
Baxter (2002), USA **We talk about it, but do they get it?**	Åk 4	Taluppfattning och tals användning: Problemlösande vardagsmatematik med addition, subtraktion och multiplikation.	Förändringen av karaktären på lärare och elevers matematiska samtal under en nioveckorsperiod. Från lärarcentrerade till elevcentrerade samtal.
Cengiz (2011), USA **Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions**	Åk 1–4	Taluppfattning och tals användning: Problemlösande vardagsmatematik med addition och subtraktion av heltal (åk 1–3) och multiplikation och division (åk 4).	Lärares olika handlingar vid tillfällen då elever engageras i matematisk reflektion och matematiska resonemang, så kallade vidgande episoder (extending episodes).
Drageset (2014), Norge **Redirecting, progressing, and focusing actions – a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics**	Åk 5–7	Taluppfattning och tals användning: Egenskaper och användning av tal i bråkform. Ex. Förklara varför $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{4}$ och $^{25}/_{50}$ är lika.	Lärares olika handlingar i samtal i helklass i (den ordinarie) matematikundervisningen. De benämns i förhållande till hur de förmår att engagera eller inte engagera elever i matematiken. Läraren behöver ibland vara mer stödjande.
Elbers (2003), Nederländerna **Classroom interaction as reflection: learning and teaching mathematics in a community of inquiry**	Åk 8	Taluppfattning och tals användning, algebra: Strategier för problemlösning i verklighetstrogna situationer med addition, multiplikation och mönster i talföljder.	Lärares handlingar för att få elever att föreslå andra sätt att tänka och lösa problem, och på så vis få elever att lära sig olika matematiska lösningsstrategier av varandra.
Elbers (2000), Nederländerna **Collaborative learning and the construction of common knowledge**	Åk 8	Geometri: Matematiska modeller och strategier för problemlösning i verklighetstrogna situationer med fokus på skala och uppskattning av längd. Ex. Hur kan vi räkna ut höjden på kyrktornet här bredvid skolan?	Hur lärare engagerar elever i ett rollspel: Vi är forskare. Låt oss forska!, och på så vis får eleverna att delta i gemensamma matematiska samtal.
Franke (2015), USA **Student engagement with others' mathematical ideas: The role of teacher invitation and support moves**	Åk 1–5	Taluppfattning och tals användning: Egenskaper och användning av heltal och tal i bråkform.	Samband mellan lärares handlingar och deras engagemang i andra elevers idéer. Om att en och samma lärarhandling ofta leder till olika engagemang hos eleverna.

Henning (2012), USA **Mathematics discussions by design: Creating opportunities for purposeful participation**	Åk 7	Geometri: Egenskaper och användning av geometriska begrepp för att beräkna area och volym av kuber, prismor, cylindrar, koner och sfärer samt upptäcka relationer och samband mellan olika geometriska figurer.	Om olika karaktär på diskussionerna i olika skeden av ett undervisningsavsnitt: inramande, begreppslig och tillämpande diskussion. Om att lärare och elevers deltagande skiljer sig i de olika diskussionerna, exempelvis att läraren styr samtalen mer i de begreppsliga diskussionerna då ny kunskap introduceras.
Hufferd-Ackles (2004), USA **Describing levels and components of a math-talk learning community**	Åk 3	Taluppfattning och tals användning: De fyra räknesättens egenskaper och användning med fokus på ensiffrig multiplikation och division och flersiffrig addition och subtraktion.	Beskrivningar av hur lärarens och elevernas roller successivt förändras under ett läsår i riktning mot utforskande samtal. Förändringarna beskrivs i nivåer i förhållande till nyckelfaktorerna: frågande, förklarande, källa till matematiska idéer och ansvar för lärande och utvärdering.
Hunter (2014), Nya Zeeland **Developing learning environments which support early algebraic reasoning: A case from a New Zealand primary classroom**	9–11 år	Algebra: Förståelse och användning av enkla algebraiska uttryck och omformulering av talföljder och geometriska mönster till uttryck. Ex. 23 + 15 = _+ 17.	Karakterisering av olika nivåer i elevers engagemang i andra elevers matematiska idéer med begreppen utforskande, disputerande och kumulativa samtal. Om hur lärare etablerar sociala och sociomatematiska normer för utforskande samtal.
Hunter (2012), Nys Zeeland **Coming to "know" mathematics through being scaffolded to "talk and do" mathematics**	Åk 4–8	Taluppfattning och tals användning: Förståelse och generaliserbarhet för sambandet multiplikation och repeterande addition samt relationen del-helhet vid bråkräkning.	Förändringen av karaktären på lärarens och elevernas matematiska samtal mot mer utforskande samtal.
Kazemi (2001), USA **Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms**	Åk 4–5	Taluppfattning och tals användning: Egenskaper och beräkningar med tal i bråkform. Förståelse för ekvivalens och relationen del-helhet samt addition av enklare bråktal.	Om hur vissa sociomatematiska normer kommer/inte kommer till uttryck i klassrumsdialoger i fyra olika klassrum, och vad det betyder för om eleverna är engagerade i matematiken på ett djupare plan eller inte.
Makar (2015), Australien **Scaffolding norms of argumentation-based inquiry in a primary mathematics classroom**	Åk 4	Sannolikhet och statistik: Problemlösande vardagsmatematik med enkla undersökningar och sortering av data i tabeller och diagram. Ex. Undersök tiden det tar för alla elever i klassen att läsa en bok.	Om lärares etablering av sociala normer för deltagande i gemensamma matematiska resonemang. Läraren synliggör önskvärda beteenden, genom att exemplifiera, och förstärka elevbeteenden samt omformulera elevernas beskrivningar av beteenden.
McCrone (2005), USA **The development of mathematical discussions: an investigation in a fifth-grade classroom**	Åk 5	Taluppfattning och tals användning: Problemlösande uppgifter med addition och subtraktion samt förståelse för generaliserbarhet genom att finna mönster.	Beskrivningar av hur lärarens och elevernas roller förändras parallellt under sex månader i riktning mot utforskande samtal. Exempelvis hur karaktären på lärarens frågor ändras samtidigt med karaktären på elevernas deltagande, och om lärarens och elevernas förhandlingar kring vissa sociomatematiska normer.

Mercer (2006), Storbrittanien **Teaching children how to use language to solve maths problems**	Åk 5	Taluppfattning och tals användning: Förståelse för relationer mellan tal genom att utforska och använda de fyra räknesätten. Ex. Vilka räkneoperationer kan användas för att gå från 4 till -2?	Beskrivning av vad som karaktäriserar utforskande samtal och analyser av skillnader i lärares och elevers beteenden i förhållande till om de resonerar utforskande eller inte.
Parks (2011), USA **Diversity of practice within one mathematics classroom**	Åk 3	Taluppfattning och tals användning, geometri: Förståelse och användning av beräkningsmetoder med addition, avrundning samt area.	Om att elever klarar av olika arbetssätt i undervisningen olika bra. Studien jämför elevers deltagande i matematiska diskussioner, grupparbeten och lekövningar.
Radford (2011), Kanada **Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction**	Åk 4	Algebra: Modellering, konstruktion och beskrivning av mönster och talföljder. Ex. En person har 100 kr och sparar sedan 10 kr/vecka. Konstruera en modell av sparprocessen till och med vecka 5.	Om elevers gemensamma matematiska resonemang och om hur läraren kan knyta an till det och ta dem steget vidare till att formulera en matematisk formel.
Webb (2014), USA **Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning**	Åk 3–4	Taluppfattning och tals användning: Problemlösande vardagsmatematik med fokus på tal i bråkform samt egenskaper hos tal i bråkform.	Om två dimensioner av elevers engagemang i gemensamma resonemang: 1) uttrycka sina egna matematiska idéer och 2) engagera sig i andra elevers matematiska idéer. Karaktäriserar lärares olika handlingar för att engagera eleverna i varandras idéer och karaktäriserar olika nivåer på elevernas engagemang i andra elevers idéer.

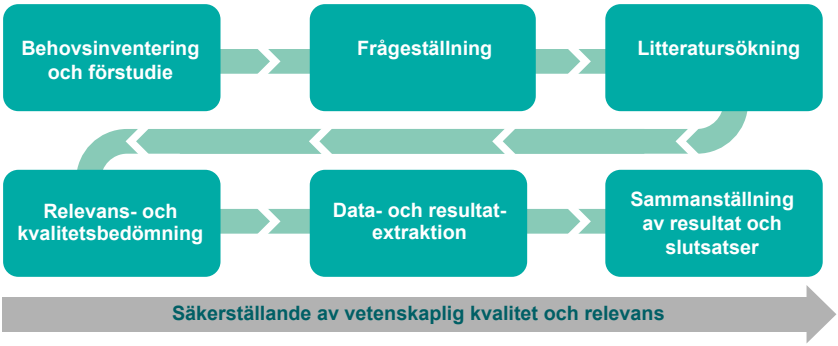
Alla studier bygger på ingående observationer och analyser av dialoger i helklass.

Kapitel 4
Metod och genomförande

4. Metod och genomförande

Detta avsnitt beskriver hur vi har gått tillväga vid genomförandet av denna systematiska översikt, från inventeringen av lärares behov av kunskap från forskning, fram till slutsatserna. De olika stegen i arbetet illustreras i figuren nedan.

FIGUR 3. Arbetsgång



Systematiska översikter kännetecknas av systematik och transparens och av att resultatet bildar en syntes av de ingående studierna. I genomförandet finns några gemensamma inslag: sökstrategier, inklusionskriterier, relevans- och kvalitetsbedömning och syntes (Gough & Thomas, 2016). Men metoderna för systematiskt översiktsarbete skiljer sig också åt mycket, eftersom de beror på karaktären på forskningsfrågan som översikten utgår ifrån och på den forskning som bildar underlag. Det finns alltså flera olika metoder för systematiskt översiktsarbete.

Forskningsfrågan i denna översikt syftar till att skapa förståelse av ett fenomen, alltså klassrumsdialog i matematikundervisningen. Forskningen som bildar underlag för översikten utgörs av begrepp och strukturer som ger mening åt det som sker i samspelet mellan lärare och elever i studierna. Översikten bygger sålunda på kvalitativa resultat (Larsson, 2005). Sammanställningen av resultaten följer en konfigurativ logik, som innebär att resultaten relateras till varandra och binds samman till en helhet (Gough & Thomas, 2016; Sandelowski & Barroso, 2006).

Även om systematiska översikter utförts under lång tid, finns inga givna metoder för sammanställning av kvalitativ forskning. De flesta systematiska översikter är gjorda inom det medicinska området i form av metaanalyser av kvantitativa data enligt en aggregativ logik. För en översiktlig beskrivning av utvecklingen inom området, se Bohlin (2010). I forskningen pågår diskussioner om metoder för sammanställning av kvalitativa resultat (Thorne, Jensen, Kearney, Noblit, & Sandelowski, 2004). Levinsson och Prøitz (2017) som undersökt centrala aktörers användning av konfigurativa ansatser inom utbildningsområdet konstaterar att dessa används i begränsad utsträckning.

Forskning inom utbildningsområdet är av både kvantitativ och kvalitativ karaktär.

Det sistnämnda utgör en betydande andel, och från flera håll uttrycks behovet av metoder för att sammanställa och på så sätt ta tillvara denna forskning (Bohlin, 2010; Levinsson & Prøitz, 2017; Thorne m.fl., 2004). Detta uttrycks också i citatet nedan. Det är Thunder och Berry (2016) som säger att det finns mycket utbildningsvetenskaplig forskning av kvalitativ karaktär, men att det saknas kunskap om vad den säger sammantaget så att kunskapen kan komma praktiken, och policynivån, till del. Speciellt intressant i denna översikt är att detta sägs i relation till just matematikämnet:

> Mathematics education has benefited from qualitative methodological approaches over the past 40 years. (…) Although the number, type, and quality of qualitative research studies in mathematics education has increased, (…) little is known about how a collective body of qualitative research findings contributes to our understanding of a particular topic within the field. In other words, there is a lack of knowledge about how to integrate or synthesize findings across qualitative studies in mathematics education in order to influence policy and practice (Thunder & Berry, 2016, s. 318).

4.1 Behovsinventering och förstudie

Översiktens inriktning har sin grund i behov av kunskap om hur lärare kan utforma en undervisning som möter och tar tillvara elevers olikheter. Detta behov identifierades vid Skolforskningsinstitutets behovsinventering som föregick arbetet med denna översikt. Institutet genomförde då gruppintervjuer med lärare, och träffade berörda myndigheter och organisationer.

Inriktningen på översikten specificerades senare i en förstudie mot arbetssättet klassrumsdialog och mot ämnet matematik. I förstudien tog projektgruppen del av relevant forskning och utvärdering och hade kontakt med forskare inom området. Litteratursökningar förvissade oss om att det inte redan fanns en aktuell systematisk översikt om klassrumsdialog i matematikundervisningen. En något äldre forskningssammanställning med liknande fokus som vårt, gav oss dock god vägledning inom området (Walshaw & Anthony, 2008). Värdefull kunskap i detta förberedande arbete fick vi också från en aktuell svensk avhandling om lärares matematiska samtal med elever (Larsson, 2015).

4.2 Syfte och frågeställning

Syftet med denna systematiska översikt är att bidra med forskningsbaserad kunskap som kan vara till hjälp vid lärares planering och ledning av klassrumsdialoger i matematik. En mer preciserad frågeställning formulerades i samråd med de externa forskare som knutits till projektet. Översiktens frågeställning lyder:

> Vad kännetecknar klassrumsdialoger som engagerar elever i matematiska resonemang och som möter och tar tillvara elevers olikheter, och vad kännetecknar lärarens ledning av sådana dialoger?

Inklusions- och exklusionskriterier

För att välja ut de forskningsartiklar som har betydelse för frågeställningen formulerade projektgruppen följande kriterier, se tabell 3 nedan. Inklusionskriterierna är de kriterier som måste uppfyllas av en primärstudie för att denna ska ha en möjlighet att kunna bidra till att besvara översiktens fråga. Exklusionskriterierna är kriterier, andra än sådana som inte följer per automatik om inte inklusionskriterierna uppfylls, som gör att studien bedöms falla utanför översiktens fråga.

I korthet kan sägas att de studier som inkluderades var klassrumsstudier med elever och lärare i grundskolan inom ramen för den ordinarie undervisningen i matematik. Endast empiriska studier inkluderades. Arbetssättet i studierna är dialoger i helklass i matematik, som leds av läraren. Kortare grupparbeten kan ingå som en del i undervisningsupplägget. Resultaten ska bygga på observationer av dialoger mellan lärare och elever, och ge förståelse av relationen mellan lärarens ledning och elevernas deltagande i matematiska resonemang.

Tabell 3. Inklusions- och exklusionskriterier: ämnesmässiga avgränsningar.

Ämnesmässiga avgränsningar		
	Inklusionskriterier – ta med	**Exklusionskriterier – ta bort**
Deltagare	Primärstudierna ska ha studerat elever och lärare i grundskolan. Primärstudierna ska ha huvudfokus på alla elevers deltagande och lärande, det vill säga utgöra forskning om hur undervisningen kan möta elevers olikheter genom att engagera hela klassen och nå ut till alla elever.	Primärstudier med huvudinriktning att studera en specifik elevgrupp, kategoriserade efter exempelvis förmåga, etnicitet, kön eller socioekonomisk bakgrund, det vill säga individualiserad undervisning för att möta behov hos vissa elevgrupper
Arbetssätt	Primärstudier ska ha studerat dialogen mellan lärare och elever i helklass i matematikundervisningen. Dialogen leds av läraren. Kortare grupparbeten kan ingå som en del i undervisningsupplägget.	
Resultat	Primärstudier ska rapportera resultat, som ger förståelse/förklaringar av relationen mellan undervisningens utformning och elevers deltagande/lärande. Primärstudier ska ge kunskap om hur undervisningens utformning (lärarens ledning av klassrumsdialogen) kan hänga ihop med förutsättningar för elevers deltagande/ lärande av innehållet. Primärstudiernas empiri ska utgöras av observationer av kommunikationen mellan lärare och elever. Intervjuer kan ingå, men endast om de kompletterar observationer.	
Sammanhang	Primärstudierna ska ha studerat klassrumsdialog inom ramen för den ordinarie undervisningen i klassrummet. Med ordinarie undervisning avses även undervisning som utformas av den ordinarie läraren i samarbete med forskare, och som leds av läraren.	Primärstudier som har studerat klassrumsdialog inom ramen för olika särskiljande lösningar, såsom särskilda undervisningsgrupper.

För urvalet av studier användes även tekniska avgränsningar, se tabell 4.

Tabell 4. Inklusions- och exklusionskriterier: tekniska avgränsningar.

Tekniska avgränsninngar		
	Inklusion – ta med	Exklusion – ta bort
Språk	Engelska, skandinaviska språk	Övriga språk
Publicerings-datum	1980 och framåt	1979 och bakåt
Vetenskaplig granskning	Peer-reviewed	Inte peer-reviewed

4.3 Litteratursökning

En systematisk översikt kännetecknas av en omfattande och systematisk sökning av forskningslitteratur. Strategin som används för att fånga relevanta forskningsresultat är en nyckelfaktor. För att utforma strategin behöver hänsyn bland annat tas till vilka källor sökningen ska utföras i, samt vilka sökord och vilken logik som ska användas för att identifiera forskning i olika databaser.

I de flesta databaser görs en sökning med hjälp av en söksträng. Söksträngen är de kombinationer av ord som matas in i databasen för att finna tänkbart relevant forskning för översiktens fråga.

Sökstrategi

Sökningen efter forskningslitteratur utfördes i flera olika typer av källor. Internationella vetenskapliga ämnesdatabaser med varierad innehållslig inriktning kompletterades med nordiska databaser för att förbättra förutsättningarna att identifiera forskning som genomförts i ett sammanhang som liknar det svenska. Litteratursökningen gjordes i följande källor:

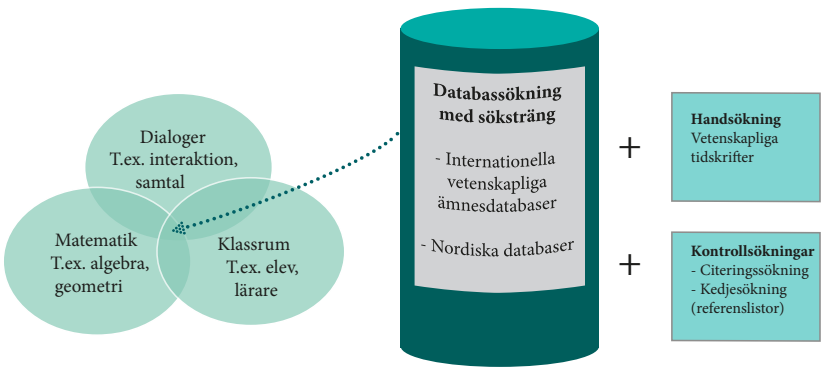
- internationella vetenskapliga ämnesdatabaser t.ex. ERIC, PsycInfo, WebOfScience
- nordiska databaser, t.ex. Libris, SwePub, DiVA
- utvalda tidskrifter och referenser.

Databassökningarna utformades genom att projektgruppen först identifierade nyckelbegrepp och relevanta sökord inom kategorierna matematik, dialog och klassrum. Söksträngen konstruerades sedan så att all forskningslitteratur som kunde fångas upp skulle innehålla minst ett sökord från respektive ordkategori. Sökorden skulle återfinnas i publikationernas titlar eller sammanfattningar, eller som nyckelord.

Utöver databassökningarna användes även andra tekniker för att identifiera relevant forskning. Viktiga vetenskapliga tidskrifter genomsöktes manuellt för att finna forskning som ännu inte publicerats i databaserna samt för att fånga upp studier som inte hittats med hjälp av sökströngen. De tidskrifter som handsöktes valdes ut baserat på vilka som genererat flest relevanta träffar efter den inledande relevansgranskningen.

Genom kontrollsökningar minimerades risken för att missa någon relevant studie. Dessa gjordes i form av citeringssökning och kedjesökning. Citeringssökning är en sökning efter publikationer som citerat utvalda artiklar. Den genomfördes på alla studier som valts ut som ämnesrelevanta för frågan och resulterade efter granskning i ytterligare en slutligt inkluderad studie. Som citeringsdatabas användes WebOf-Science och Google Scholar. Vid kedjesökning granskas artiklars referenslistor. Urvalet av artiklar som kedjesöktes gjordes av de externa forskarna och de bestod av alla studier som slutligen valdes ut att ingå i översikten. Ingen ytterligare studie fångades upp med hjälp av kedjesökningen, vilket projektgruppen tolkade som att sökstrategin fungerat på ett godtagbart sätt. För en detaljerad beskrivning av sökstrategin inklusive källor, sökord och begränsningar, se bilaga 2 Sökstrategi på webbplatsen www.skolfi.se.

FIGUR 4. Utformning av sökstrategi



4.4 Relevans- och kvalitetsbedömning

Relevans- och kvalitetsbedömning av studierna görs i en systematisk översikt i flera steg. Figur 5 illustrerar urvalsprocessen i denna översikt. Den visar att sökningen resulterade i totalt 10 528 artiklar. Urvalsprocessen inleds med relevansbedömningar styrda av inklusions- och exklusionskriterier.

I steg 1 togs 9 628 publikationer bort i en första grovsållning. Denna gjordes internt på Skolforskningsinstitutet och de publikationer som togs bort var uppenbart inte relevanta. Exempelvis var det publikationer som inte handlade om undervisning, matematik eller elever i grundskolan.

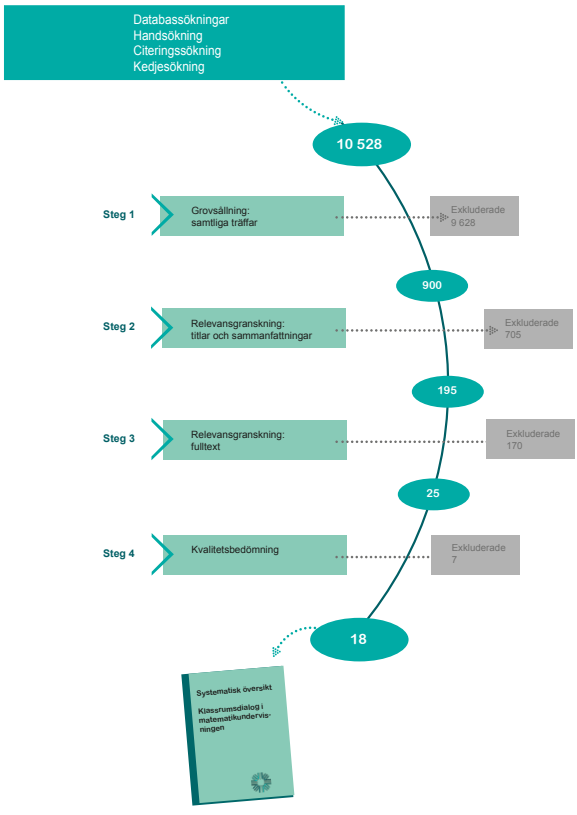
I steg 2 relevansgranskade projektgruppens två externa forskare de återstående 900

publikationerna genom att läsa publikationernas titel och abstrakt, dvs. den inledande sammanfattningen. De externa forskarnas bedömningar gjordes oberoende av varandra. I detta steg tas forskning med till nästa steg om det i publikationens abstrakt saknas information som behövs för att bedöma huruvida studien ska inkluderas. Studier tas också med även om bara en av forskarna inkluderar studien. Vid denna granskning sållade forskarna bort ytterligare 705 studier.

I steg 3 relevansgranskande de två externa forskarna de återstående 195 studierna i fulltext. Även denna gång genomförde de externa forskarna granskningen oberoende av varandra. De skilda bedömningar som de externa forskarna hade gjort togs upp till diskussion och löstes genom konsensusförfarande. Granskningen i detta steg innebar att ytterligare 170 artiklar valdes bort.

I steg 4 kvalitetsbedömde de externa forskarna de återstående 25 studierna. Bedömningarna gjordes med stöd av Skolforskningsinstitutets underlag för kvalitetsbedömning. Sju artiklar exkluderades på grund av bristande kvalitet. Skälen för exkludering skiljde sig mellan studierna (se bilaga 3 på www.skolfi.se). Urvalsprocessen resulterade slutligen i arton artiklar som alltså bedömdes vara relevanta för översiktens forskningsfråga och av god kvalitet.

FIGUR 5 . Flödesschema



4.5 Data- och resultatextraktion

Nästa steg i det systematiska översiktsarbetet bestod i att lyfta ur den data och de resultat i studierna som ska ingå i den kommande sammanställningen.

Detta arbete inleddes med att projektgruppens externa forskare skrev sammanfattningar av resultaten i varje studie. Sammanfattningarna fungerade som vägledning för projektgruppens förståelse av resultaten i de enskilda studierna.

Projektgruppen diskuterade resultaten i studierna med utgångspunkt i de externa forskarnas sammanfattningar och läsning av studierna. De externa forskarna uttryckte sina idéer om hur resultaten i de olika studierna förhåller sig till varandra, och gav förslag på en struktur för sammanställning av resultaten. De externa forskarnas sammanfattningar och förslag på sammanställning var sedan vägledande i den resultattext som projektledaren skrev i samarbete med projektgruppen. De externa forskarna läste och gav respons på textskisser vid två tillfällen.

4.6 Sammanställning av resultaten

Ett kännetecken för en systematisk översikt är att den skapar en syntes av resultaten i de ingående studierna (Gough & Thomas, 2016; Thorne m.fl., 2004). På så vis skiljer sig systematiska översikter från forskningssammanställningar där de ingående studierna ofta redovisas genom en uppräkning av studiernas metod, begränsningar, resultat och slutsatser, men där det saknas en analys av vad studierna säger sammantaget (Noblit & Hare, 1988).

Resultaten i de studier som ingår i denna översikt är av kvalitativ karaktär. Resultaten ger mening till det som studeras i form av begrepp och strukturer (Sandelowski & Barroso, 2006). Utvecklingen av metoder för sammanställning av denna typ av resultat pågår (Thorne m.fl., 2004). Vår syntes av resultaten i studierna följer det som kallas för en konfigurativ logik som beskrivs av Gough & Thomas (2016) med referens till Sandelowski, Voils, Leeman & Crandell (Sandelowski, Voils, Leeman, & Crandell, 2012):

> Configuration is another key concept in synthesis, encapsulating the action of placing study findings alongside one another in order to build up a picture of the whole, and how they relate to one another (…) (Gough & Thomas, 2016, s. 88)

Den konfigurativa logiken handlar alltså om att skapa en sammanhängande helhet av de ingående studiernas resultat. Metoden för att göra det i denna översikt är inspirerad av metaetnografi och det som Noblit och Hare (1988) benämner ”line of argument”. För en tillämpning av line of argument, se Lillejord och kollegor (2015). Detta syntesformat beskrivs av Noblit i Thorne m.fl. (2004):

> Our line of argument synthesis recognized that often people study different aspects of phenomena and that it might be possible to think through this to offer a fuller account of the phenomenon by arranging the studies' metaphors in some order

> that allowed us to construct an argument about what the sets of ethnographies says (Thorne m.fl., 2004, s. 8).

Fenomenet i vår översikt är klassrumsdialog, närmare bestämt samspelet mellan lärare och elever i matematiska samtal. Genom sammanställningen av de olika studierna belyses skilda aspekter av detta samspel. Bland de utvalda studierna finns forskning med fokus på karaktären i elevers engagemang i andra elevers idéer och som skiljer mellan utforskande, disputerande och kumulativa samtal. Det ingår också forskning som studerar hur olika normer för utforskande samtal i matematik, skapas och kommer till uttryck i dialogerna. Likaså ingår forskning som beskriver lärares och elevers olika roller i utforskande samtal och hur de förändras parallellt. En del av studierna redovisar liknande resultat och det kan innebära att bara någon eller några av dem redovisas utförligt, medan övriga endast kommenteras kort i anslutning till dem. Det är för att översikten inte ska bli för omfattande. Sammanställningen av resultaten kan liknas vid en mosaik, där resultaten från de olika studierna belyser olika delar av en helhet. Tillsammans ger de en sammantagen och mångfacetterad bild av klassrumsdialog i matematikundervisningen.

Det ska också sägas att studiernas olikheter till viss del har att göra med att studierna utgår från skilda forskningsansatser. Detta tar vi hänsyn till i vår sammanställning av materialet, bland annat för att hantera eventuella motsägande resultat. Vår avsikt är dock inte att ge en översiktlig bild av skillnader mellan olika forskningsansatser och teoribildningar inom området.

Användning av resultaten

Kunskapen från denna systematiska översikt kan användas av lärare för att uppmärksamma och förstå det som sker i klassrumsdialoger på ett nytt sätt. Den kan öka lärares förståelse av den egna praktiken, och hur den kan utvecklas. Larsson (2009) menar att generalisering av kvalitativa resultat kan förstås som en *möjlig* användning av resultaten:

> … generalization is about the potential use of a piece of research: generalization is an act, which is completed when someone can make sense of situations or processes or other phenomena with the help of interpretations, which emanate from research texts (Larsson, 2009, s. 34).

Vi redovisar alltså inte ett resultat som gör det möjligt att förutsäga vad som kommer att ske, men som kan ge stöd för att förutse möjliga skeenden. Larsson igen, jämför utvecklingen av stor andel kvalitativa resultat med utvecklingen av en diagnostisk repertoar:

> We can compare the use of a substantial portion of qualitative research with the development of a diagnostic repertoire: interpretational tool for identifying patterns in the everyday world and making better sense of the world around us (Larsson, 2009).

Referenser

Ayalon, M., & Even, R. (2016). Factors Shaping Students' Opportunities to Engage in Argumentative Activity. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(3), 575-601.

Baxter, J., Woodward, J., Voorhies, J., & Wong, J. (2002). We Talk about It, But Do They Get It? *Learning Disabilities: Research & Practice, 17*(3), 173-185.

Bentley, P.-O. (2009). TIMSS 2007–En djupanalys av svenska elevers matematikkunskaper: *Nämnaren*.

Bohlin, I. (2010). Systematiska översikter, vetenskaplig kumulativitet och evidensbaserad pedagogik. *Pedagogisk forskning i Sverige, 15*(2-3), 164-186.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending Students' Mathematical Thinking during Whole-Group Discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(5), 355-374.

Drageset, O. G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions-a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 281-304.

Elbers, E. (2003). Classroom Interaction as Reflection: Learning and Teaching Mathematics in a Community of Inquiry. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 77-99.

Elbers, E., & Streefland, L. (2000). Collaborative Learning and the Construction of Common Knowledge. *European Journal of Psychology of Education, 15*(4), 479-490.

Franke, M. L., Turrou, A. C., Webb, N. M., Ing, M., Wong, J., Shin, N., & Fernandez, C. (2015). Student engagement with others' mathematical ideas: The role of teacher invitation and support moves. *The Elementary School Journal, 116*(1), 1-23.

Gough, D., & Thomas, J. (2016). Systematic Reviews of Research in Education: Aims, Myths and Multiple Methods. *Review of Education, 4*(1), 84-102.

Henning, J. E., McKeny, T., Foley, G. D., & Balong, M. (2012). Mathematics Discussions by Design: Creating Opportunities for Purposeful Participation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(6), 453-479.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing Levels and Components of a Math-Talk Learning Community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(2), 81-116.

Hunter, J. (2014). Developing Learning Environments Which Support Early Algebraic Reasoning: A Case from a New Zealand Primary Classroom. *Mathematics Education Research Journal, 26*(4), 659-682.

Hunter, R. (2012). Coming to "Know" Mathematics through Being Scaffolded to "Talk and Do" Mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Kazemi, E., & Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *The Elementary School Journal, 102*(1), 59-80.

Larsson, M. (2015). *Orchestrating mathematical whole-class discussions in the problem-solving classroom : theorizing challenges and support for teachers.* (Doktorsavhandling), Mälardalens högskola, Västerås. Hämtad från http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:mdh:diva-29409

Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk pedagogik, 25*(1), 16-35.

Larsson, S. (2009). A pluralist view of generalization in qualitative research. *International Journal of Research & Method in Education, 32*(1), 25-38.

Levinsson, M., & Prøitz, T. S. (2017). The (non-) use of configurative reviews in education. *Education Inquiry*, 1-23.

Lillejord, S., Børte, K., Halvorsrud, K., Ruud, E., & Freyr, T. . (2015). *Tiltak med positiv innvirkning på barns overgang fra barnehage til skole: En systematisk kunnskapsoversikt*. Oslo: Kunnskapssenter for utdanning, www.kunnskapssenter.no

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2015). Scaffolding Norms of Argumentation-Based Inquiry in a Primary Mathematics Classroom. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 47*(7), 1107-1120.

McCrone, S. S. (2005). The Development of Mathematical Discussions: An Investigation in a Fifth-Grade Classroom. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 7*(2), 111-133.

Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching Children How to Use Language to Solve Maths Problems. *Language and Education, 20*(6), 507-528.

Noblit, G. W., & Hare, R. D. (1988). *Meta-ethnography: Synthesizing qualitative studies* (Vol. 11): Sage.

Parks, A. N. (2011). Diversity of practice within one mathematics classroom. *Pedagogies: An International Journal, 6*(3), 216-233.

Sandelowski, M., & Barroso, J. (2006). *Handbook for synthesizing qualitative research*: Springer Publishing Company.

Sandelowski, M., Voils, C. I., Leeman, J., & Crandell, J. L. (2012). Mapping the mixed methods–mixed research synthesis terrain. *Journal of Mixed Methods Research, 6*(4), 317-331. doi:10.1177/1558689811427913

Thorne, S., Jensen, L., Kearney, M. H., Noblit, G., & Sandelowski, M. (2004). Qualitative Metasynthesis: Reflections on Methodological Orientation and Ideological Agenda. *Qualitative Health Research, 14*(10), 1342-1365. doi:10.1177/1049732304269888

Thunder, K., & Berry, R. Q., III. (2016). Research Commentary: The Promise of Qualitative Metasynthesis for Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(4), 318-337.

Walshaw, M., & Anthony, G. (2008). The Teacher's Role in Classroom Discourse: A Review of Recent Research into Mathematics Classrooms. *Review of Educational Research, 78*(3), 516-551.

Webb, N. M., Franke, M. L., Ing, M., Wong, J., Fernandez, C. H., Shin, N., & Turrou, A. C. (2014). Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning. *International Journal of Educational Research, 63*, 79-93.