



SKOL
FORSKNINGS
INSTITUTET

SAMMANFATTAR OCH KOMMENTERAR

Rationella tal

– undervisning för elever som uppvisar
svårigheter i sin matematikutveckling

2026:01

Omslagsfoto: Vida Winkel, Scandinav Bildbyrå

Citera denna rapport: *Rationella tal – undervisning för elever som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling*. Skolforskningsinstitutet sammanfattar och kommenterar 2026:01. Stockholm: Skolforskningsinstitutet. ISSN 2003-3664.

© Skolforskningsinstitutet

www.skolfi.se

www.skolforskningsportalen.se

Rationella tal

– undervisning för elever som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling

Skolforskningsinstitutet sammanfattar och kommenterar

Skolforskningsinstitutet bevakar internationella forskningsöversikter för att kunna ta tillvara vetenskaplig kunskap som kan vara till nytta för verksamma inom svensk förskola och skola. Vi sammanfattar och kommenterar översikterna utifrån ett svenskt perspektiv. Arbetet genomförs av medarbetare vid institutet i samarbete med verksamma lärare och en extern forskare med relevant ämneskompetens för översikten.

Målgrupp

Vi riktar oss främst till förskollärare och lärare men även till lärarutbildningen, skolledare och andra verksamma inom skolväsendet som på olika sätt kan främja goda förutsättningar för en undervisning på vetenskaplig grund.

Så väljer vi ut forskningsöversikter

Forskningsöversikter som vi bedömer vara intressanta i relation till vårt uppdrag relevans- och kvalitetsgranskas. Om vår bedömning är att en översikt är relevant för målgrupperna och håller tillräcklig kvalitet, tar vi fram en rapport med översikten som utgångspunkt. Vi granskar översikterna men inte de enskilda studier som de bygger på. Forskning som förändrar kunskapsläget kan ha tillkommit efter det att en forskningsöversikt sammanställts.

Innehåll

Skolforskningsinstitutet sammanfattar och kommenterar	2
Målgrupp	2
Så väljer vi ut forskningsöversikter	2
1. Inledning	4
2. Sammanfattning av forskningsöversikten	5
2.1 Genomföra interventioner för att undersöka elevers lärande	5
2.2 Syfte och frågeställningar	6
2.3 Resultat	6
2.3.1 Undervisningspraktikerna	7
2.4 Analysera och sammanställa studier för att få rättvisande resultat	8
2.4.1 Faktorer som påverkar effekten av interventionerna	9
2.4.2 Undervisningspraktiker av signifikant betydelse	10
3. Skolforskningsinstitutet kommenterar	13
3.1 Tallinjen som redskap	13
3.2 Språk och begreppsbildning som redskap	14
3.3 Möjligheter och begränsningar med översikten	15
3.3.1 Metodologiska begränsningar	15
3.3.2 Betydande effektstorlekar	16
Projektgrupp	17
Referenser	18

1. Inledning

Matematikundervisningen i grundskolan syftar övergripande till att elever ska utveckla kunskaper om matematik och hur matematiken kan användas i vardagen (Skolverket, 2025). Kunskaper om rationella tal är centralt för att kunna förstå och hantera grundläggande begrepp och beräkningar med bråk, decimaler, procent och proportioner (Eriksson, 2021; Eriksson & Eriksson, 2016). Dessa kunskaper är en god förutsättning för att gå vidare till högre studier inom matematik och naturvetenskapliga ämnen.

Rationella tal nämns i kursplanerna för matematik under de centrala innehållen *taluppfattning och tals användning*. Under årskurs 1–3 ska eleverna möta tal i bråkform samt lära sig att delar av helhet och del av antal kan benämnas och uttryckas som enkla bråk. Under årskurs 4–6 förekommer rationella tal som ett specifikt centralt innehåll.

I den här rapporten sammanfattar och kommenterar vi en systematisk översikt som sammanställt resultat från interventioner som genomförts i syfte att främja elevers kunskaper om rationella tal. I de 28 studierna som ingår i översikten är fokus på elever i mellan- eller högstadiet som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling. Samtliga studier är gjorda i USA. Trots att forskarna på förhand hade bestämt att endast amerikanska studier skulle vara med (studier genomförda i andra länder var ett så kallat exklusionskriterium) bedömer vi att översikten är relevant i en svensk skolkontext, eftersom den undervisning som beskrivs skedde i sammanhang som kan jämföras med sådana kontexter som finns i svenska skolor.

Översikten bidrar med värdefull fördjupad kunskap när det gäller didaktiska överväganden vid undervisningen av rationella tal. Med denna rapport vill vi göra resultaten tillgängliga för lärare inom det svenska skolväsendet. Rapporten består av en sammanfattning av den systematiska översikten samt en kommentar där vi diskuterar översiktens resultat och hur de kan förstås och relateras till en svensk kontext.

Sammanfattad och kommenterad översikt

Identifying key instructional practices in rational number interventions: A systematic review and meta-analysis

Författare: Krowka, S.K., Jayanthi, M., Schumacher, R. F., Gersten, R., Haymond, M.A., Newman-Gonchar, R.A.

Publicerad i tidskrift: *Learning Disability Quarterly*. 48(4), s. 227–241.

Doi: <https://doi.org/10.1177/07319487241288823>

Publiceringsår: 2025.

Översiktens fokus: Effekter av undervisning av rationella tal för elever med svårigheter i matematik.

Elevernas ålder: Årskurs 3–9.

2. Sammanfattning av forskningsöversikten

Översikten *Identifying key instructional practices in rational number interventions: A systematic review and meta-analysis* (Krowka m.fl., 2025) syftar till att undersöka vilka undervisningspraktiker som används i undervisning av rationella tal som ger positiva effekter på matematikkunskaper för som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling. I översikten definieras elever med eller i risk för matematiksvårigheter om det finns en uttalad inlärningssvårighet i matematik eller om de presterat under 35:e percentilen¹ på ett giltigt screeningmått av allmän matematikkunskap eller områden som rationella tal.

En av utmaningarna när det gäller att utveckla förståelse för rationella tal är svårigheter att uppskatta och förstå storleken på ett rationellt tal. Enligt översikten är det vanligt att elever, särskilt elever som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling, tillämpar sin förståelse av positiva heltal på förståelsen av rationella tal, vilket leder till missuppfattningar. Ett exempel kan vara att korrekt identifiera att 0,5 är större än 0,3, men att felaktigt identifiera 0,05 som större än 0,3. Elever kan också ha svårt med förståelsen för att det finns oändligt många tal mellan två rationella tal, eller förståelsen för de många sätt på vilka ett rationellt tal kan representeras, till exempel att $\frac{3}{4}$ också kan skrivas som $\frac{9}{12}$, $\frac{750}{1000}$ eller 0,75.

2.1 Genomföra interventioner för att undersöka elevers lärande

Enligt forskarna behöver elever, och framför allt elever som har eller som riskerar att utveckla matematiksvårigheter, riktade pedagogiska insatser för att stärka sin kunskapsutveckling och bemästra förståelsen av rationella tal. I översikten används den engelska termen *interventions* för de riktade undervisningsinsatser som man testat och undersökt i undervisningspraktikerna.

Inom skolforskning används interventionsstudier när man vill mäta eventuell utveckling av elevers lärande till följd av ett visst arbetssätt. Det kan alltså vara olika pedagogiska insatser som planeras, genomförs och utvärderas i syfte att stödja elevers lärande. Utvecklingen mäts genom att jämföra effekten mellan en interventionsgrupp och en jämförelsegrupp. Dessa grupper kan antingen skapas randomiserat, vilket menas att grupperna är indelade efter ett slumpmässigt val där den ena gruppen (interventionsgruppen)

¹ Percentilvärden visar hur en individs resultat förhåller sig till en normgrupp på ett prov. Ett resultat på 35:e percentilen innebär att eleven presterade bättre än 35 procent av de elever som gjorde samma prov, och lägre än resterande 65 procent.

får undervisning enligt den metod eller insats man vill undersöka effekten av, och den andra gruppen (jämförelsegruppen) deltar i så kallad ordinarie undervisning eller får undervisning enligt en annan metod som man vill jämföra med. Det kan även vara en kvasiexperimentell studie där man utgår från redan existerande grupper. Syftet med grupperna är att man ska kunna skilja effekten av en insats från en normalt förväntad kunskapsutveckling som följer av att delta i någon typ av undervisning. Ett kriterium för att en studie skulle kunna ingå i översikten var att den antingen skulle vara en randomiserad kontrollerad studie (RCT) eller en kvasiexperimentell studie.

2.2 Syfte och frågeställningar

I översikten framkommer att det finns tidigare studier och översikter som berör undervisning om rationella tal, men forskarna menar att det saknas systematiskt framtagen kunskap om vilka undervisningspraktiker som mest effektivt stödjer elever som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling. Syftet med översikten är att undersöka vilka specifika undervisningspraktiker i undervisningen av rationella tal som har en positiv inverkan på matematikkunskaper för elever med eller i risk för att utveckla svårigheter i matematik. Översikten utgår från två forskningsfrågor:

- Vilka undervisningspraktiker vid undervisning av rationella tal är starkast förknippade med positiva effekter på matematikkunskaper för elever som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling?
- Vilka samband finns mellan effektstorlek och olika interventionsupplägg och faktorer som gruppstorlek, vem som leder interventionen eller vilken undervisning jämförelsegruppen fått?

2.3 Resultat

Översiktens resultat indikerar att interventioner som syftar till att främja kunskaper om rationella tal generellt har positiv effekt för elever med eller i risk för att utveckla svårigheter i matematik under mellan- och högstadiet.

I vår redovisning av översiktens resultat utgår vi från de olika undervisningspraktiker som undersöks i studierna. För att identifiera och kategorisera de undervisningspraktiker som förekom i interventionerna utgick forskarna från WWC:s² rekommendationer, vilket resulterade i sju mest frekvent förekommande undervisningspraktiker:

- Matematiskt språk.
- Tallinjen.
- Att främja flyt.
- Visuella representationer.
- Elevers förklaringar/motiveringar.
- Problemlösningstrategier.
- Repetition.

² What Works Clearinghouse (<https://ies.ed.gov/ncee/wwc>) är en organisation med finansiering från det amerikanska utbildningsdepartementet, som bland annat har till uppgift att göra forskningsammansättningar inom utbildningsområdet.

Undervisning i matematiskt språk och användning av tallinjen är enligt översikten de mest betydelsefulla undervisningspraktikerna eftersom endast de var förknippade med en statistiskt säkerställd ökad positiv effekt på elevernas prestationer i matematik.

2.3.1 Undervisningspraktikerna

I översikten används det engelska begreppet *instructional practice*, vilket vi i denna rapport har valt att översätta till undervisningspraktik. Undervisningspraktiker definierades endast som sådana när det var moment i undervisningen som bedrevs med en intention att rikta sig till en grupp elever eller var planerade för att driva undervisningen mot föruppställda kunskapsmål. Lärares bemötande av elever, enskild feedback eller support till elever, definierades således inte som undervisningspraktiker. En undervisningspraktik är ett didaktiskt inslag som är konstant och inte styrs av exempelvis en elevs behov i stunden, utan som är planerad för en grupp elever och som kan utgöra tydliga inslag i en lektion.

Matematiskt språk

Undervisningspraktiken syftar till att elever får lära sig nyckeltermerna och begrepp som är nödvändiga för att förstå och kunna kommunicera undervisningsinnehållet, exempelvis täljare, nämnare och lika delar, ”lika mycket som”. Läraren kan också tillhandahålla en ordlista med förklaringar av de matematiska nyckeltermerna och begreppen vilket kan stödja elevernas lärande. Denna undervisningspraktik fanns med i tolv studier.

Tallinjen

I denna undervisningspraktik används tallinjen som en integrerad och central del i undervisningen. I studierna får eleverna lära sig hur man använder en tallinje för att visualisera storleken av ett rationellt tal. Tallinjen används också för att lära ut addition och subtraktion av bråk. För att göra den abstrakta tallinjen mer konkret och meningsfull kan den användas i relation till andra undervisningsmaterial som exempelvis cuisenairestavar för att underlätta elevernas förståelse. Denna undervisningspraktik fanns med i 13 studier.

Att främja flyt

Att arbeta med elevers förmågor att automatisera beräkningar av rationella tal har i studierna till exempel handlat om att elever arbetar tillsammans i små grupper eller i par och besvarar frågor på en förutbestämd tid, vanligtvis mellan två och fem minuter. Ibland ingår ett moment av återkoppling och att eleverna får ge korrekta svar innan de fortsätter. Ett annat exempel är elever som använder mattekort för att öva multiplikation och omedelbart korrigerar sina felaktiga svar innan de går vidare till nästa kort, vilket stimulerar flytet och automatiseringen. Denna undervisningspraktik fanns med i tio studier.

Visuella representationer

I denna kategori fanns arbete med visuella representationer som till exempel bråkplatta, cuisenairestavar eller bilder av längd- eller areamodeller. Gemensamt för dessa visuella

representationer är att de används för att eleverna ska utveckla förståelse för att rationella tal kan betraktas som en del av en helhet, till exempel när bråktalet $\frac{1}{4}$ illustreras som en fjärdedel av en cirkel. Lärare i studierna använder även kroppsspråk med olika representativa gester för att visualisera exempelvis storlek. Denna undervisningspraktik fanns med i 20 studier.

Elevers förklaringar/motiveringar

Denna undervisningspraktik syftar till att eleverna uppmanas att förklara och motivera sina uträkningar. De får till exempel öva på detta genom att motivera sitt korrekta svar i relation till uppgifter som innehåller inbyggda felaktigheter. Eleverna får också förklara muntligt det som de skriftligt redogjort för. Denna undervisningspraktik fanns med i nio studier.

Problemlösningstrategier

Undervisningspraktiken fokuserar på att lära eleverna olika strategier för att lösa matematiska problem samt erbjuda dem olika verktyg för att påminna om stegen i strategierna. Ett exempel på en strategi i fyra steg för att lösa ett matematiskt problem är DISC. D står för upptäck (discover) problemtypen, I står för identifiera (identify) information i problemet för att representera i ett diagram, S står för lös (solve) problemet och C för kontrollera (check) lösningen.

Andra studier visade att olika verktyg kan användas som minnesregler för att skapa bättre förutsättningar för eleverna att minnas stegen i strategierna. Denna undervisningspraktik fanns med i 14 studier.

Repetition

Undervisningen innehåller en session av repetitionsaktiviteter eller inbyggd kumulativ repetition, som bygger på att repetera tidigare information enligt systematiska tidsintervaller. Det är en undervisningsmetod där tidigare introducerade koncept och problem vävs samman med nytt material. Denna undervisningspraktik fanns med i 18 studier.

2.4 Analysera och sammanställa studier för att få rättvisande resultat

I översikten använder sig forskarna av metaanalyser, vilket är en statistisk metod för att väga samman resultat från enskilda studier. I metaanalyser beräknas en genomsnittlig effektstorlek som visar i vilken riktning det samlade resultatet pekar. Effektstorlek avser Hedges g , ett mått som visar hur stor skillnaden är mellan två grupper uttryckt i standardavvikelse, samtidigt som man tar hänsyn till spridningen inom varje grupp.³ För att upptäcka variation mellan studier gjorde forskarna moderatoranalyser där de undersökte huruvida omgivande faktorer eller förekomsten av olika undervisningspraktiker kan ha betydelse för hur stor effekten blir. För alla metaanalyser och moderatoranalyser beräk-

³ Hedges g liknar Cohens d , men ger ett mer tillförlitligt resultat för studier med små grupper (få studiedeltagare).

nade forskarna p-värden, vilket kan beskrivas som sannolikheten för att få ett slumpmässigt falskt resultat. I denna sammanfattning använder vi begreppet (statistiskt) signifikant för att beskriva att man kan utesluta ett slumpmässigt falskt resultat. I översikten presenteras resultatet i tabeller. I den här sammanfattningen har vi i stället valt att presentera resultatet dels i löpande text, dels i ett skogsdiagram⁴. Skogsdiagrammet visar skillnader i genomsnittlig effekt mellan studier där en undervisningspraktik ingår jämfört med studier där undervisningspraktiken inte ingår.

Forskarna delade in analysarbetet av de 28 studierna som ingår i översikten i tre moment:

1. Sammanvägd effekt av interventionerna.
2. På vilket sätt förutsättningar som elevernas ålder, undervisningssammanhang och genomförande av interventionen, påverkade effekten av interventionerna.
3. Samband mellan undervisningspraktiker och elevernas kunskaper i matematikundervisningen.

2.4.1 Faktorer som påverkar effekten av interventionerna

Effekterna av interventionerna beräknades utifrån testresultat av elevers kunskaper om rationella tal, textuppgifter, problemlösning, eller allmänna matematikkunskaper. Enligt forskarna var de studerade interventionerna över lag effektiva för elever som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling; den sammanvägda effekten för studierna som ingick i metaanalysen hade ett medelvärde på $g=0,68$ (KI 0,51; 0,85). Men även om interventionen genomsnittligt hade en positiv och betydande effekt på elevernas matematikkunskaper, var effekten i vissa enskilda studier mycket större, medan effekten i vissa andra studier till och med var något negativ. Ett vanligt riktmärke för effektstorlekar är att räkna $g=0,20$, $g=0,50$ och $g=0,80$ som liten, medelstor, respektive stor effekt (Cohen, 1969). I avsnitt 3.3.2 diskuterar vi mer utförligt hur effektstorlekar kan tolkas.

För att förstå denna variation ville forskarna undersöka om det fanns några samband mellan effektstorlek och interventionernas omgivande faktorer:

- årskurs
- gruppstorlek
- undervisningssammanhang (specialundervisning, ordinarie klassrum respektive tilläggsundervisning)
- interventionens längd
- interventionsledare (lärare eller forskare)
- utbildning inför insatsen
- fortbildning i metoden under pågående intervention
- jämförelseaktivitet (vilken undervisning insatsen jämfördes med).

Genom att undersöka samband mellan dessa faktorer och effektstorleken kan man förstå under vilka förutsättningar interventionerna var effektiva.

Interventionerna gav större effekt för yngre elever (i årskurs 3–6) jämfört med äldre

⁴ Vi har skapat skogsdiagrammet i R (R Core Team, 2024) med paketet ggplot2 (Wickham, 2016).

elever. Gruppstorlek var också av betydelse. När elevgruppen bestod av små grupper (2–6 elever) gav interventionen bättre effekt än i större gruppkonstellationer. Det fanns dock ingen säkerställd skillnad mellan studier som genomfördes i specialundervisning jämfört med undervisning i helklass eller specialundervisning jämfört med tilläggsundervisning. Långa interventioner (19 timmar eller mer) hade större effekt än korta interventioner. Studier där jämförelsegruppen fick en annan, näraliggande, intervention påvisade en lägre effekt än i studier där jämförelsegruppen fick sedvanlig undervisning.

I interventionsstudier kan interventionen genomföras antingen av elevernas ordinarie lärare eller av en forskare som kommer till klassrummet. Därför undersökte forskarna om det fanns någon skillnad i effektstorlek beroende på om undervisningen leddes av ordinarie lärare eller av en extern forskare. Interventionen fick större effekt när en extern forskare ansvarade för genomförandet. Författarna menar att detta resultat går i linje med antagandet om att forskningspersonal oftast genomgår mer omfattande och specifik träning i den aktuella metoden både innan och under studiens genomförande samt att de får tätare handledning, än i studier där ordinarie lärare är de som leder interventionen. Huruvida interventionsledaren hade fått utbildning i den aktuella metoden innan studiens start spelade dock inte någon säkerställd roll för effekten. Däremot var det förknippat med en starkare effekt när den som ledde undervisningen fick kontinuerlig handledning i metoden under studiens gång. Författarna menar att resultaten kan förklaras med att tillgång till handledning under studiens genomförande ger interventionsledaren möjlighet att reda ut oklarheter och lösa problem.

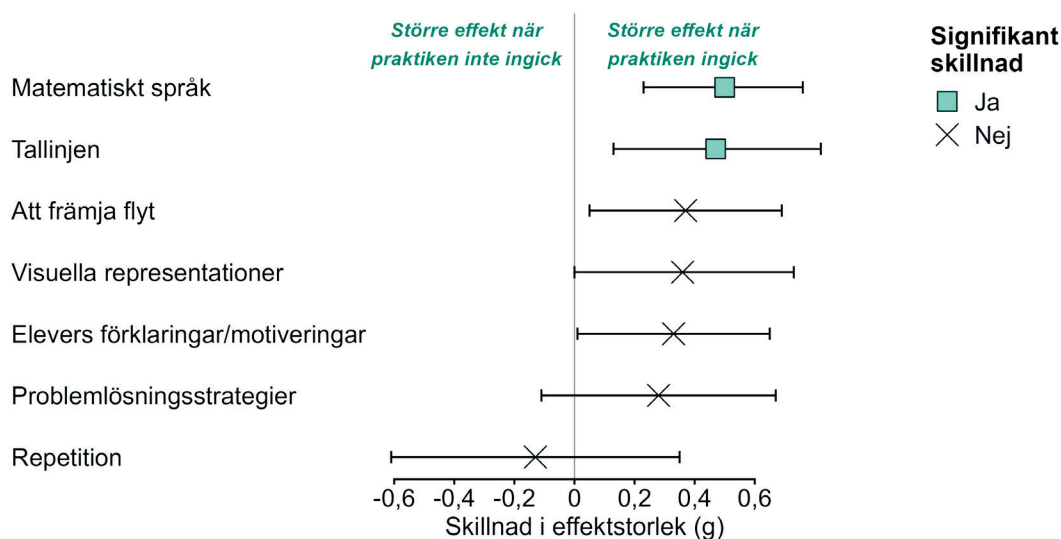
2.4.2 Undervisningspraktiker av signifikant betydelse

De sju undervisningspraktikerna och dess effekter på elevers kunskapsutveckling i matematik undersöktes i två steg. Först undersöktes effekten av varje enskild undervisningspraktik. Därefter lade författarna upp en rad flervariabelanalyser (multipla metaregressionsanalyser), där effekten för varje undervisningspraktik undersöktes, samtidigt som man kontrollerade för två kontrollvariabler: interventionsledare, om en lärare eller forskare genomfört interventionen, och typ av jämförelseaktivitet, om eleverna i jämförelsegruppen fick sedvanlig undervisning eller om de fick en annan liknande intervention.

Skogsdiagrammet i figur 1 illustrerar resultaten av metaanalyserna för undervisningspraktikerna. I diagrammet redovisas regressionskoefficienten, b (beta) för respektive undervisningspraktik. Regressionskoefficienten visar hur mycket effekten (Hedges g) skiljer sig mellan de studier där undervisningspraktiken ingick, jämfört med de studier där undervisningspraktiken inte ingick.

Som figur 1 visar var det endast förekomsten av undervisningspraktikerna matematiskt språk ($b=0,50$, $KI=0,23$; $0,76$) och tallinjen ($b=0,47$, $KI=0,13$; $0,82$) som var förknippade med en statistiskt säkerställd ökad positiv effekt på elevers kunskapsutveckling i matematik, oavsett vem som ledde interventionen och oavsett vilken typ av undervisning eleverna i jämförelsegruppen fick. Övriga fem undervisningspraktiker var inte statistiskt signifikanta när man kontrollerade för interventionsledare och jämförelsevillkor.

Figur 1. Samband mellan undervisningspraktiker och elevers prestationer i matematik



Informationen i diagrammet är hämtad från den nedre halvan i tabell 3, s. 235 i översikten. Punkterna markerar riktningen och styrkan på sambandet mellan respektive undervisningspraktik och effektstorleken, alltså hur stor skillnad det är i genomsnittlig effekt mellan studier där undervisningspraktiken ingick jämfört med studier där undervisningspraktiken inte ingick. De horisontella linjerna visar konfidensintervallet (95%).

Tallinjen

Att förstå innebörden i ett tals storlek och värde är avgörande inom matematik. Enligt översikten är det en återkommande svårighet för elever, framför allt för elever som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling, att uppskatta och få en förståelse för storleken och värdet på rationella tal.

Eleverna i studierna har eller är i risk att utveckla matematiksvårigheter. Matematiksvårigheter kan exempelvis innebära att elever kan ha svårigheter med uppräknings och att jämföra två tal och kunna se vilket som är störst, vilket visar på en outvecklad taluppfattning. Det kan också vara en utmaning att förstå att tal i bråkform och tal i decimalform är olika representationer av samma tal med samma värden. Översiktens resultat visar att de interventioner där tallinjen används för att skapa förutsättningar för att utveckla förståelse för rationella tals storlek är förknippade med en positiv effekt.

Med hjälp av tallinjen kan eleverna visualisera storleken av ett rationellt tal. Läraren kan också använda tallinjen till att synliggöra mellanrummet och på så vis tydliggöra relationen mellan talmarkörer för rationella tal. Eleverna får börja med att placera ut ett referensbråk på tallinjen (t.ex. $3 \frac{1}{2}$) och sedan stegvis placera ut ytterligare bråk i en logisk sekvens. De använder sedan referenspunkter och uppdelningstekniker för att jämföra den relativa storleken av bråk samt för att ordna bråken från minst till störst, och för att generera ekvivalenta bråk.

Tallinjen som undervisningspraktik kan också syfta till att skapa förståelse för addition och subtraktion av bråk. För att göra den abstrakta tallinjen mer konkret och meningsfull kan den kombineras med konkreta representationer som cuisenairestavar och bråkplatta.

Matematiskt språk och begreppsbildning

Matematiskt språk har en hög grad av abstraktionsnivå. Enligt översikten är förmågan att kommunicera tydligt och korrekt svårt även för de mest avancerade eleverna, och särskilt svårt för elever som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling. Exempelvis kan det vara svårt för eleverna att veta vilka egenskaper matematiska termer har – det vill säga vilket begrepp som kännetecknar termen, liksom vilka sammanhang som påverkar användningen. En term som exempelvis produkt har en specifik betydelse inom matematik, men har andra betydelser i andra sammanhang, vilket kan leda till förvirring. Undervisningspraktiker där matematiskt språk förekommer innebär att läraren fokuserar på betydelsen av viktiga termer och uttryck för att underlätta för eleverna att förstå ett komplext innehåll. Det kan handla om att eleverna lär sig termer som proportion, täljare, nämnare och enhet och vad som kännetecknar dem. Det kan också innebära att lära ut ett abstrakt språk eller svåra begrepp som används i textuppgifter, speciellt så kallade relationella fraser såsom ”lika många som” eller ”lika mycket som”.

Översikten visar att lärarna med fördel kan modellera för eleverna hur man i matematiska förklaringar och resonemang använder relevanta och korrekta begrepp för att förklara matematiska termer. Forskarna menar att lärare dessutom kan stimulera och uppmuntra elevernas användning av specifika och korrekta matematiska termer. Det kan exempelvis ske genom att påminna eleverna om att de ska använda begreppet polygon i stället för form, eller säga ”två adderat med två är lika med fyra” i stället för ”två adderat med två är fyra”. I undervisningen kan läraren också tillhandahålla stöd i form av listor på matematiska termer som eleverna har lärt sig och som de kan använda när de förklarar hur de har tänkt.

Ett annat inslag i en undervisningspraktik som betonar matematiskt språk är när lärare medvetet använder frågor som utmanar eleverna i att försöka reflektera över om de använt korrekta matematiska termer när de förklarar sina tillvägagångssätt. Detta kan ske genom frågor som eleverna kan ställa till sig själva när de förklarar sin problemlösningsprocess.

3. Skolforskningsinstitutet kommenterar

Intresset för att hitta metoder, redskap och praktiker som främjar elevernas lärande har varit av intresse lika länge som skolan har funnits. Även inom forskning har undervisning och elevers lärande utgjort en av de stora frågorna. Det är värdefullt när en systematisk översikt kan bidra med kunskap om hur undervisningen – i detta fall om rationella tal – kan utvecklas. Som framgår av sammanfattningen av översikten identifierar Krowka och kollegor (2025) två undervisningspraktiker som kan relateras till elevers kunskapsutveckling: undervisningspraktiken kopplat till språk- och begreppsanvändning samt användning av tallinjen.

Forskarna beskriver vilka undervisningspraktiker som har betydelse för elevernas lärande, men beskriver i mindre utsträckning hur en sådan undervisning kan realiseras i praktiken. I denna kommentar kommer vi diskutera hur dessa resultat kan förstås i en svensk kontext. Kommentaren kan bidra med fördjupning och exempel som lärare kan använda för att pröva och utveckla sin undervisning om rationella tal, genom att synliggöra hur de två undervisningspraktikerna kan främja elevers matematikutveckling.

3.1 Tallinjen som redskap

Tallinjen är ett kraftfullt matematiskt redskap med rötter i sent 1600-tal. I svenska klassrum och läromedel introduceras dock tal i bråkform ofta genom geometriska figurer inom området $0-1$, där bråket framställs som en del av en helhet (Berggren, 2022). Bråk presenteras för de yngre eleverna ofta genom del-helhetsrepresentationer, exempelvis genom en cirkel som delas i fyra lika stora delar och där delarna benämns fjärdedelar, eller när bråk i blandad form representeras med flera hela figurer och en uppdelad. Att introducera tal i bråkform genom figurer som pizzor eller chokladkakor riskerar att leda elevernas uppmärksamhet mot delningshandlingar snarare än mot analys av relationer mellan storheter (Davydov och TSvetkovich, 1991; Eriksson & Eriksson, 2016). Översiktens resultat visar att elever som uppvisar svårigheter i sin matematikutveckling har fördel av att få utforska bråk som tal, grundade i relationer och mätningar snarare än via geometriska del- och helhetsrepresentationer.

Om tal i bråkform inte behandlas som tal med en bestämd plats på tallinjen förblir relationerna mellan talen otydliga – något som kan kvarstå även hos elever i årskurs 6 (se t.ex. Fransson m.fl., 2018). Del-helhetsrepresentationer kan förvisso underlätta en första

konkretisering, men riskerar också att begränsa och befästa förståelsen av bråktal som konkreta delar av en helhet, snarare än som ett tal. Detta arbetsätt riskerar att dölja den principiella struktur som rationella tal vilar på eftersom elever behöver möta de rationella talen som andra tal (Davydov och TSvetkovich, 1991).

Klassrumsstudier visar att när tallinjen främst används som hjälpmedel för att ”placera ut” bråktal leder det sällan till djupare förståelse (Sveider, 2016; 2021). När läraren i stället aktivt hjälper eleverna att relatera representationer till varandra – exempelvis att se hur en tredjedel på tallinjen motsvarar en uppdelning av ett mätintervall i tre lika delar – blir tallinjen ett redskap för att tänka snarare än ett sätt att visa talets placering på tallinjen. Tallinjen kan fungera som en brygga mellan olika sätt att förstå tal i bråkform (Björkhammer m.fl. 2025a; 2025b). Genom att låta elever jämföra avstånd, resonera om mellanrum och diskutera frågor som ”vilken punkt som ligger mitt emellan?” skapas möjligheter att förstå talens inbördes relationer.

Elever kan ha svårt att se bråk som tal med ett bestämt värde. När elever får arbeta med att placera bråk på tallinjen i stället för att enbart arbeta med geometriska figurer visade det sig att förståelsen utvecklades från att se bråk som delar av en helhet till att förstå dem som punkter på tallinjen, vilket var av avgörande betydelse för att eleverna skulle börja resonera om bråktal i termer av storlek och värde (Fransson m.fl., 2018). Tallinjen kan således fungera som en brygga mellan del-helhetsperspektivet och ett mer teoretiskt, relationsbaserat sätt att förstå rationella tal, även i högre årskurser.

3.2 Språk och begreppsbildning som redskap

Den andra undervisningspraktiken som översikten lyfter fram handlar om matematiskt språk och begreppsanvändning. Resultatet visar att undervisning som explicit fokuserar på hur elever utvecklar och använder matematiska begrepp och termer har starkt samband med elevers kunskapsutveckling i matematik.

Elevernas sätt att tala om och förstå tal i bråkform formas av de representationer de möter, framför allt de geometriska del-helhetsmodeller som dominerar undervisningen i Sverige (Jäder & Johansson, 2025). Elever utgår ofta från de representationer som används i uppgiften – exempelvis cirklar och rektanglar – och skapar sällan egna, vilket begränsar deras möjligheter att uttrycka relationer mellan tal på varierande sätt. Särskilt svårt blir detta när representationerna avviker från typiska modeller. Ett exempel på det kan vara när tallinjen används i syfte att ”dela upp” i stället för som ett redskap för att resonera om avstånd och storlek. Arbetet med att variera representationer och att stödja skiften mellan dem kan vara av vikt för att utveckla ett språk som underlättar för eleverna att beskriva rationella tal som relationer snarare än delar (Jäder & Johansson, 2025). Läraren kan i undervisningen skapa förutsättningar för att eleverna kan öva sig att förhålla sig till både bekanta och mindre bekanta representationer och diskutera dessa.

De exempel på viktiga begrepp och termer som Krowka och kollegor pekar på i översikten är lättare att förankra hos eleverna om de får möjlighet att arbeta med rationella tal i relation till tallinjen. Fokus kan då förskjutas från hur en figur delas upp till hur tal kan jämföras och relateras. Ett sådant språkande stödjer en förståelse av tal i bråkform som uttryck för förhållanden och proportioner, snarare än som delar av en given helhet.

Språkets roll behöver ses både som bärande och generativ: det utgör inte bara ett medel för att uttrycka matematiska idéer med matematiskt relevanta begrepp och termer, utan är samtidigt ett redskap genom vilket eleverna utvecklar förmågan att tänka matematiskt (Jäder & Johansson, 2025; Berggren, 2022; Eriksson & Eriksson, 2021).

Sammanfattningsvis handlar det om att vägen mot en djupare förståelse av rationella tal innebär att skapa en undervisning där tallinjen används som ett centralt redskap för tänkande som gör det möjligt att resonera om storlek, jämförelse och proportion. Tallinjen och språket i kombination blir då ett redskap för att elever tidigt i sin utbildning kan få möjlighet att möta rationella tal och då speciellt tal i bråkform via mätningar och som uttryck för förhållanden och proportioner.

3.3 Möjligheter och begränsningar med översikten

Att jämföra och utvärdera undervisning är en utmanande forskningsuppgift, och som vi har diskuterat i kapitel 2 finns det olika aspekter som kan påverka resultaten.

3.3.1 Metodologiska begränsningar

Det finns metodologiska begränsningar i översikten som man bör ha i åtanke då resultaten tolkas. Under Skolforskningsinstitutets granskning av översiktens vetenskapliga kvalitet noterade vi att dokumentationen av litteratursökningen inte redovisats tillräckligt utförligt. Därför kontaktade vi forskarna bakom översikten och bad om kompletterande information, som bedömdes vara av tillräckligt god kvalitet. Det är dock viktigt att vara medveten om att litteratursökningen var utformad på ett sätt som med stor sannolikhet kan ha medfört att fler potentiellt relevanta studier inte fångats av sökningen. Eftersom resultatet som framkom ändå är av hög relevans för utvecklingen av matematikundervisning beslutade vi att sammanfatta och kommentera denna översikt.

När det gäller huruvida översiktens resultat kan ses som trovärdiga, har forskarna använt olika metoder för att i så hög grad som möjligt säkerställa detta. Ingen av dessa har visat på något resultat som tyder på systematiska feltolkningar. En känslighetsanalys gjordes för att undersöka huruvida resultatet påverkats av att flera av studierna är genomförda av samma forskargrupp. Känslighetsanalysen visade ingen sådan påverkan.

Forskarna i översikten beskriver en svårighet att kontrollera för förekomsten av överlappning mellan undervisningspraktikerna, vilket innebär utmaningar när det gäller att undersöka effekten av de olika undervisningspraktikerna. I de flesta av interventionerna förekom fler än en undervisningspraktik. En intervention kunde exempelvis bestå av användandet av tallinjen samtidigt som fokus även låg på matematiskt språk, repetition och problemlösningstrategier. Utan att samtidigt kontrollera för förekomsten av andra undervisningspraktiker går det inte att avgöra om en viss praktik är mer effektiv än någon annan. En multipel metaregressionsmodell skulle kunnat möjliggöra att undersöka om en specifik undervisningspraktik hade bättre effekt än någon annan, men eftersom det var alltför hög grad av multikollinearitet mellan variabler var detta tillvägagångs-

sätt inte möjligt.⁵ Detta är en vanlig utmaning i metaanalyser. Därför valde forskarna att endast rapportera de resultat som erhöles genom att undersöka varje undervisningspraktik individuellt med de två kontrollvariablerna. Det betyder alltså att i undervisningen kan en kombination av de undervisningspraktiker som redovisas i rapporten innebära både större och lägre effekt av elevers förståelse av rationella tal. En annan utmaning som rör identifiering och kategorisering av undervisningspraktiker var att det på grund av de mångfacetterade interventionerna var utmanande att exakt identifiera och koda undervisningspraktiker i varje interventionsstudie. I de olika studierna beskrivs undervisningspraktikerna med stor variation när det gäller noggrannhet och detaljrikedom. Enligt forskarna kan de ha missat att identifiera en undervisningspraktik på grund av bristande beskrivning av undervisningspraktiken. Det är därför möjligt att det har förekommit undervisningspraktiker som inte har identifierats och kodats som sådana.

3.3.2 Betydande effektstorlekar

I avsnitt 2.4.1 framkommer att den genomsnittliga interventionen hade en positiv och betydande effekt på elevernas matematikkunskaper. Emellertid var effekten i vissa enskilda studier mycket större än genomsnittet, medan effekten i vissa andra studier till och med var något negativ. Den sammanvägda effekten för de studier som ingick i metaanalysen hade ett medelvärde på $g=0,68$ (KI 0,51; 0,85), vilket innebär att de studerade interventionerna hade en tämligen stor effekt. Denna betydande effektstorlek kan förstås i relation till att de elever som ingick i studien uppvisade svårigheter i sin matematikutveckling och rimligen befann sig på en lägre kunskapsnivå vid startpunkten av interventionerna och således fanns möjlighet för deras kunskapsutveckling att ta större kliv framåt.

Vedertagna riktlinjer för effektstorlekar (Cohen, 1969) har diskuterats av Kraft (2020) med utgångspunkt i att riktlinjerna har utgått från en alltför förenklad syn på vad som faktiskt kan påverka effekten av en intervention inom området pedagogik/utbildningsvetenskap. Kraft skriver att en eventuell följd av en alltför platt och snäv tolkning av effektmått kan bli att betydelsen av olika interventionsstudiers effekt blir felaktigt bedömda. Det är därför av stor vikt att effektstorlekar bedöms i relation till kontextuella faktorer. Ett effektmått med ett medelvärde på $g=0,68$ (KI 0,51; 0,85) kan ses som av jämförelsevis stor betydelse eftersom en kontextuell faktor är att samtliga elever som ingått i studierna som ingår i översikten uppvisat svårigheter i sin matematikutveckling. Således fanns stor utvecklingspotential av deras förståelse av rationella tal. Detta kan bidra till förståelsen av att medelvärdet av effektmåttet är av betydande stor effekt.

Eftersom detta forskningsfält fortfarande är under utveckling finns det behov av framtida forskningsinsatser som med avancerade statistiska analyser undersöker sambanden mellan undervisningsmetoderna som används i flerkomponentinterventioner och elevresultat (Krowka m.fl., 2025). På så vis kan det bli möjligt att ytterligare klargöra effekten av de undervisningspraktiker som finns i interventioner med rationella tal.

5 Multikollinearitet innebär att flera variabler är starkt korrelerade med varandra. I detta fall handlade det om att flera undervisningspraktiker förekom samtidigt i flera interventioner.

Projektgrupp

Denna sammanfattning och kommentar har tagits fram av medarbetare på Skolforskningsinstitutet i samarbete med en extern forskare.

Sofia Eriksson Bergström fil.dr (projektledare)

Linnéa Öberg, fil.dr (biträdande projektledare)

Inger Eriksson, professor emerita i pedagogik med inriktning lärande och läroplansteori vid Stockholms universitet

Anna Hedman (redaktör)

Värdefulla synpunkter på rapporten har lämnats av Åsa Melén Nord, matematik-utvecklare och speciallärare i Hammarö kommun samt Anne Bergström och Kerstin Nordahl, lärare i grundskolan i Västerås.

Referenser

- Berggren, J. (2022). Some conceptual metaphors for rational numbers as fractions in Swedish mathematics textbooks for elementary education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 67(6), 914–927. <https://doi.org/10.1080/00313831.2022.2114541>
- Björk, M. (2023). *Att främja elevers teoretiska utforskande av bassystemet: En undervisningsutvecklande studie i matematik på mellanstadiet*. [Licentiatuppsats, Stockholms universitet]. <http://su.diva-portal.org/smash/get/diva2:1731873/FULLTEXT01.pdf>
- Björk, M., & Berthén, D. (2024). Att skapa förutsättningar för elevers teoretiska arbete med bassystemet. *Forskning om undervisning och lärande*, 12(1), s. 69–88. <https://doi.org/10.61998/forskul.v12i1.22924>
- Björkhammer, C. (2025). Elevers kunskaper om tal i bråkform: teoretiska antaganden och effekter av undervisningsinsatser i årskurs 5. [Doktorsavhandling, Linköpings universitet].
- Björkhammer, C., Träff, U., & Östergren, R. (2025a). Predicting fraction magnitude knowledge and fraction arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology*, 260. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2025.106344>
- Björkhammer, C., Hedman, M., Krey, A-K., Samuelsson, J., Träff, U., & Östergren, R. (2025b). Effects of a fraction intervention for students with special educational needs in mathematics. *Scandinavian Journal of Educational Research*, s. 1–18. <https://doi.org/10.1080/00313831.2025.2552232>
- Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study*. Nova Science Publishers. (Originalutgåvan publicerad 1986)
- Davydov, V. V., & Tsvetkovich, Z. H. (1991). The objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13(1).
- Cohen, J. (1969). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (1st ed.). Academic Press.
- Eriksson, H. (2015). *Rationella tal som tal. Algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap*. [Licentiatuppsats, Stockholms universitet]. <https://su.diva-portal.org/smash/get/diva2:920927/FULLTEXT01.pdf>
- Eriksson, H. (2021). *Att utveckla algebraiskt tänkande genom lärandeverksamhet. En undervisningsutvecklande studie i flerspråkiga klasser i grundskolans tidigaste årskurser*. [Doktorsavhandling, Stockholms universitet]. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1529155/FULLTEXT03.pdf>
- Eriksson, H., & Eriksson, I. (2016). Matematik som teoretiskt arbete – utveckling av matematiska modeller för rationella tal i åk 4. *Forskning om Undervisning och Lärande*, 4(1), s. 6–24. <https://doi.org/10.61998/forskul.v4i1.27502>
- Eriksson, H., & Eriksson, I. (2021). Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 363–378. <https://doi-org.ezp.sub.su.se/10.1007/s10649-020-10007-y>
- Eriksson, I. (2017). Lärandeverksamhet som redskap i en learning study. I Carlgren, I. (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Learning study* (s. 61–81). Gleerups.

- Fransson, S., Fellenius, K., Lidgren, C., Westin, P. & Eriksson, I. (2018). The Swedish mathematics case: Learning to see fractions as numbers on the number line. I Eriksson, I. & O-Saki, K.M. (Red.), *School development through teacher research – a comparative study on Lesson and Learning Studies in Sweden and Tanzania* (s. 154–163). Mkuki na Nyota Publishers Ltd.
- Krowka, S.K., Jayanthi, M., Schumacher, R. F., Gersten, R., Haymond, K.S., Newman-Gonchar, R.A. (2025) Identifying key instructional practices in rational number interventions: A systematic review and meta-analysis. *Learning Disability Quarterly*. 48(4), s. 227–241. <https://doi.org/10.1177/07319487241288823>
- R Core Team (2024). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rojo, M., King, S., Gersib, J., & Bryant, D. P. (2023). Rational number interventions for students with mathematics difficulties: A meta-analysis. *Remedial and Special Education*, 44(3), s. 225–238. <https://doi.org/10.1177/07419325221105520>
- Skolverket (2025). *Matematikundervisning i grundskolan. Om förutsättningar för elevers lärande*. Rapport 2025:24
- Sveider, C. (2016). *Lärares och elevers användande av laborativt material i bråkundervisningen i skolor 4-6: vad görs möjligt för eleverna att erfa?* [Licentiatavhandling Linköpings universitet]
- Sveider, C. (2021). *Representationer av tal i bråkform: en studie om matematikundervisning på mellanstadiet*. [Doktorsavhandling, Linköpings universitet].
- Venenciano, L. (2017). Early curricular experiences with nonnumeric quantities, Evidence of an enduring perspective. *International Journal for mathematics teaching and Learning*, 18(2), s. 181–202. <https://doi.org/10.4256/ijmtl.v18i2.70>
- Vysotskaya, E., Lobanova, A., Rehtman, I., & Yanishevskaya, M. (2015). Activity approach to teaching place-value principle. I *EAPRIL Proceedings*. November 24–27, 2015 Belval, Luxembourg (s. 439–4)
- Wickham, H. (2016). *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York.

